

Trigonometría y Complejos

Atención: Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.

- 1) Demostrar que es cierta la identidad:
$$\frac{1 - \cos^2 x}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 x}{2}$$
- 2) Resolver la ecuación $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 1 - 2 \cos x$
- 3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 25$ m, $B = 36^\circ$ y $C = 58^\circ$
- 4) Calcular $(-3 + i\sqrt{3})^{13}$
- 5) Hallar todas las raíces cúbicas de -27 en el conjunto de los números complejos.

SOLUCIONES

1) Demostrar que es cierta la identidad: $\frac{1 - \cos^2 x}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos^2 x}{4 \frac{1 + \cos x}{2}} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

2) Resolver la ecuación $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 1 - 2 \cos x$

$$\begin{aligned} \cos 2x + 2 \cos^2 x &= 1 - 2 \cos x \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x &= 0 \Rightarrow \\ \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x &= 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \\ 2 \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4}{4} = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-1 \pm 3}{4} &= \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-4}{4} = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 25$ m, $B = 36^\circ$ y $C = 58^\circ$

Conocemos dos ángulos y un lado, por lo que utilizamos el Teorema de los Senos. En primer lugar, hallamos el ángulo que nos falta:

$$A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 36^\circ - 58^\circ = 86^\circ$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{25 \operatorname{sen} 36^\circ}{\operatorname{sen} 86^\circ} = 14,73 \text{ m} \\ \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{25 \operatorname{sen} 58^\circ}{\operatorname{sen} 86^\circ} = 21,25 \text{ m} \end{aligned}$$

4) Calcular $(-3 + i\sqrt{3})^{13}$

Desarrollar la expresión en binómica es muy complicado, por lo que comenzamos pasando la base a polares.

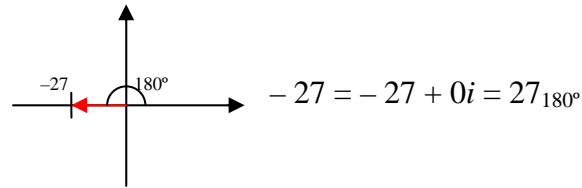
- Módulo: $\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Argumento: $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30^\circ$. Pero como la parte real es negativa (-3) y la parte imaginaria, positiva ($\sqrt{3}$), estamos en el 2º cuadrante $\Rightarrow \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Por tanto, $-3 + \sqrt{3}i = (2\sqrt{3})_{150^\circ}$. Luego:

$$\begin{aligned} (-3 + \sqrt{3}i)^{13} &= \left[(2\sqrt{3})_{150^\circ} \right]^{13} = \left[(2\sqrt{3})^{13} \right]_{150^\circ \cdot 13} = \left[2^{13} (\sqrt{3})^{13} \right]_{1950^\circ} = \left[2^{13} (\sqrt{3})^{12} \sqrt{3} \right]_{1950^\circ} = \\ &= \left[2^{13} 3^6 \sqrt{3} \right]_{150^\circ} \end{aligned}$$

dado que al dividir 1950° entre 360° se obtiene de cociente 5 y de resto, 150° (o sea, 5 vueltas completas más 150°).

5) Hallar todas las raíces cúbicas de -27 en el conjunto de los números complejos. Comenzamos escribiendo -27 (que está en binómica) en polares:



Por tanto, el módulo del número del que hay que hallar todas las raíces cúbicas es 27, y el argumento 180° . Lo que significa que las tres soluciones (son raíces cúbicas) tienen de módulo:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Sus argumentos respectivos, serán:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \cdot 0 = 60^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \cdot 1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{180^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \cdot 2 = 60^\circ + 120^\circ \cdot 2 = 300^\circ$$

Por lo que las tres soluciones son:

$$\boxed{z_1 = 3_{60^\circ}; \quad z_2 = 3_{180^\circ} = -3; \quad z_3 = 3_{300^\circ}}$$