

## Trigonometría

**Atención:** Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.

- 1) Demostrar que es cierta la identidad:  $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{cos} 2x} = \operatorname{tg} x$
- 2) Resolver la ecuación  $\operatorname{cos} 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$
- 3) Resolver un triángulo sabiendo que  $a = 5$  cm,  $b = 4$  cm y  $C = 47^\circ$  (ángulo comprendido)
- 4) Usando fórmulas trigonométricas y sin usar calculadora, hallar todas las razones de  $a$ , sabiendo que  $\operatorname{tg} a = 2$ , y que  $a > 180^\circ$ . Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale  $a$ .
- 5) Sin usar calculadora, decir los valores de: a)  $\operatorname{tg} 4800^\circ$ ; b)  $\operatorname{cos} (-4725^\circ)$ ; c)  $\operatorname{sen} 15^\circ$ ; d)  $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$

## SOLUCIONES

1) Demostrar que es cierta la identidad:  $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} &= \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{2\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

2) Resolver la ecuación  $\cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned} \cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x &\Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4 \operatorname{sen} x \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x &= 1 + 4 \operatorname{sen} x \Rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x = 4 \operatorname{sen} x \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = 2 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x &\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sen} x + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -2 \Rightarrow \text{Imposible} \end{cases} \end{aligned}$$

3) Resolver un triángulo sabiendo que  $a = 5$  cm,  $b = 4$  cm y  $C = 47^\circ$  (ángulo comprendido)

Por el T. del coseno:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 47^\circ \Rightarrow \boxed{c = 3.70 \text{ m}}$

Para calcular  $A$  volvemos a emplear el T. del coseno, porque el del seno daría dos resultados y sólo uno de ellos sería válido, al haber empezado el problema con el T. del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 3.7^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 3.7} \Rightarrow \boxed{A = 80,83^\circ}$$

De donde:  $B = 180^\circ - (A + C) = \boxed{52,17^\circ}$

4) Usando fórmulas trigonométricas y sin usar calculadora, hallar todas las razones de  $a$ , sabiendo que  $\operatorname{tg} a = 2$ , y que  $a > 180^\circ$ . Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale  $a$ .

$a$  es del tercer cuadrante  $\Rightarrow$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + 2^2 = 5 \Rightarrow \boxed{\cos a = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{Por otra parte: } \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} a} = \operatorname{tg} a \cos a = 2 \left( -\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \boxed{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{Por tanto: } \boxed{\operatorname{cotg} a = \frac{1}{2}, \operatorname{sec} a = -\sqrt{5}, \operatorname{cosec} a = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = -\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Con la calculadora, usando que  $\operatorname{tg} a = 2$ , obtenemos  $63,43^\circ$ . Como es del tercer cuadrante:

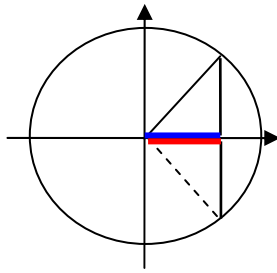
$$a = 180^\circ + 63,43^\circ = \boxed{243,43^\circ}$$

5) Sin usar calculadora, decir los valores de: a)  $\operatorname{tg} 4800^\circ$ ; b)  $\cos(-4725^\circ)$ ; c)  $\operatorname{sen} 15^\circ$ ; d)  $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$

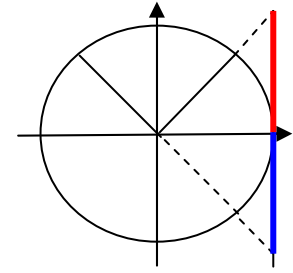
a) Dividiendo  $4.800$  entre  $360$  se obtiene  $13$  de cociente y  $120$  de resto. Es decir:  $4.800^\circ = 360^\circ \cdot 13 + 120^\circ$ . Luego  $4.800^\circ$  coincide, sobre la circunferencia, con  $120^\circ$ , después de dar  $13$  vueltas. Por tanto:

$$\boxed{\operatorname{tg} 4800^\circ} = \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} (180 - 120^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = \boxed{-\sqrt{3}}$$

- b) De la misma forma,  $4725 = 360 \cdot 13 + 45^\circ \Rightarrow -4725^\circ$  coincide con  $-45^\circ$ , después de 13 vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante:



$$\boxed{\cos(-4725^\circ)} = \cos(-45^\circ) = \cos(45^\circ) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$



$$\text{c) } \boxed{\operatorname{sen} 15^\circ} = \operatorname{sen} 30^\circ/2 = +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

El signo + se debe a que  $15^\circ$  es del primer cuadrante. Otra posibilidad es:

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{sen} 15^\circ} &= \operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ) = \operatorname{sen}45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} \end{aligned}$$

Ambos resultados coinciden:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4 \cdot 2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{3})}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

d) Transformando en producto:

$$\boxed{\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ} = 2 \cos \frac{75+15}{2} \operatorname{sen} \frac{75-15}{2} = 2 \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$