Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2}{3+x} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Solución.

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3+2e^x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2e^x\right]_{-1}^{0}=\frac{0^4}{4}+2e^0-\left(\frac{(-1)^4}{4}+2e^{-1}\right)=\frac{7}{4}-\frac{2}{e}=1{,}014$$

Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x+2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución.

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{2}{x+2}\,dx=2\cdot\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+2}\,dx=\left\{\begin{array}{c} \int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\text{Ln}\left|f(x)+C\right| \\ f(x)=x+2 \\ f'(x)=1 \end{array}\right\}=\left(2\cdot\text{Ln}\left|x+2\right|\right]_{-1}^{0}=$$

$$=2\cdot\text{Ln}\left|0+2\right|-2\cdot\text{Ln}\left|-1+2\right|=2\cdot\text{Ln}\,2-2\cdot\text{Ln}\,1=2\cdot\text{Ln}\,2=\text{Ln}\,2^2=\text{Ln}\,4$$

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f\,'(x)=6x^2+4x-2.$$

Determínese la expresión de f (x) sabiendo que f (0) = 5.

Solución.

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}\Rightarrow df(x)=f'(x)\cdot dx$$

Tomando integrales en ambos miembros de la igualdad:

$$\int df(x)=\int f'(x)\cdot dx$$

La diferencial y la integral se anulan entre si, obteniendo f(x)

$$f(x)=\int\left(6x^2+4x-2\right)\cdot dx=6\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-2x+C=2x^3+2x^2-2x+C$$

El cálculo de la constante se hace con el valor inicial f (0) = 5.

$$f(x)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-2\cdot 0+C=5 \quad ; \quad C=5$$

$$f(x)=2x^3+2x^2-2x+5$$

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=4x^3-ax^2-ax+2$, $a\in \mathbb{R}$.

Para a = 2, calcúlese el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\overset{a=2}{=}\int_{-1}^{1}\left(4x^3-2x^2-2x+2\right)dx=\left(\frac{4x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2+2x\right]_{-1}^{1}=\left(1^4-\frac{2}{3}1^3-1^2+2\cdot 1\right)-\left((-1)^4-\frac{2}{3}(-1)^3-(-1)^2+2\cdot(-1)\right)=$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{-4}{3}=\frac{8}{3}$$

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x)=3x^2+2x$$

Calcúlese la expresión de f (x) sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 4).

Solución.

$f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}\Rightarrow df(x)=f'(x)\cdot dx$, tomando integrales en los dos miembros de la ecuación:

$$\int df(x)=\int f'(x)\cdot dx$$

La integral y la diferencial se anulan entre si:

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int\left(3x^2+2x\right)\cdot dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+C=x^3+x^2+C$$

Para calcular la constante de integración, nos informan que la función f(x) pasa por (1, 4)

$$f(1)=4\ ,\ \ 1^3+1^2+C=4\ ,C=2$$

$$f(x)=x^3+x^2+2$$

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{\lambda x}{4+x^2}$$

Calcúlese $\int_0^2 f(x)dx$ para $\lambda = 1$.

Solución.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{x}{4+x^2}dx=\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=Ln|f(x)|+C\\ f(x)=4+x^2\\ f'(x)=2x\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(Ln\left|4+x^2\right|\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(Ln\left|4+2^2\right|-Ln\left|4+0^2\right|\right)=\frac{1}{2}(Ln8-Ln4)=\frac{1}{2}Ln\frac{8}{4}=\frac{1}{2}Ln2=Ln\sqrt{2}$$

Dada la función real de variable real $f(x)=4x^3-3x^2-2x$

Calcúlese $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$

Solución.

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(4x^3-3x^2-2x\right)dx=\left(\frac{4x^{3+1}}{3+1}-\frac{3x^{2+1}}{2+1}-\frac{2x^{1+1}}{1+1}\right]_2^3=\left(x^4-x^3-x^2\right]_2^3=$$

$$=\left(x^4-x^3-x^2\right]_2^3=\left(3^4-3^3-3^2\right)-\left(2^4-2^3-2^2\right)=45-4=41$$

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

Calcúlese $\int_1^3 f(x)\,dx$

Solución.

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3\left(x^2-2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3=\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1\right)=\frac{14}{3}$$

Se considera la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-4}{x+2}-1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Calcúlese $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Solución.

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\left(\frac{-4}{x+2}-1\right)dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=-4\int_{-1}^0\frac{1}{x+2}dx-\int_{-1}^0 1\,dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=-4\left(\text{Ln}|x+2|\right]_{-1}^0-\left(x\right]_{-1}^0+\left(\text{Ln}|x+1|\right]_0^1=-4\cdot\left(\text{Ln}|0+2|-\text{Ln}|-1+2|\right)-\left(0-(-1)\right)+\left(\text{Ln}|1+1|-\text{Ln}|0+1|\right)=$$

$$=-4\cdot\left(\text{Ln}\,2-\text{Ln}\,1\right)-1+\text{Ln}\,2-\text{Ln}\,1=-4\cdot\left(\text{Ln}\,2-0\right)-1+\text{Ln}\,2-0=-3\,\text{Ln}\,2-1$$

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

Calcúlese la integral definida $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+4}dx=\left\{\begin{matrix}\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\text{Ln}\,f(x)+C \\ f(x)=x^2+4 \\ f'(x)=2x\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+4}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\text{Ln}\left(x^2+4\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\text{Ln}\left(1^2+4\right)-\frac{1}{2}\text{Ln}\left(0^2+4\right)=\frac{1}{2}\text{Ln}\,5-\frac{1}{2}\text{Ln}\,4=\text{Ln}\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dada la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} -x^2-3x-5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Calcúlese $\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución.

Para calcular la integral definida, hay que tener en cuenta que en el intervalo de integración la función toma dos expresiones diferentes, aplicando las propiedades de la regla de Barrow la integral queda de la siguiente forma:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2-3x-5\right)dx + \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{-x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-5x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{-1^3}{3}-\frac{3\cdot 1^2}{2}-5\cdot 1\right)-\left(\frac{-0^3}{3}-\frac{3\cdot 0^2}{2}-5\cdot 0\right)+\left(\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{1^3}{3}\right)=-\frac{9}{2}$$

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$

Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}dx$

Solución.

$$\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_2^5 \frac{\frac{x(2x-1)}{x-1}}{x^2}dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x}dx = \left\{\begin{array}{c} \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)+C| \\ f(x)=x^2-x \\ f'(x)=2x-1 \end{array}\right\} = \left[\ln\left|x^2-x\right|\right]_2^5 =$$

$$= \ln\left|5^2-5\right| - \ln\left|2^2-2\right| = \ln 20 - \ln 2 = \mathrm{Ln}\,\frac{20}{2} = \ln 10$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

Para a = b = 1, c = 2, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$

Solución.

$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+x+2 & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$ La integral $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ se resuelve aplicando las propiedades de la regla de Barrow.

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 (2x+2)\,dx + \int_0^3 \left(x^2+x+2\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2}+2x\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^3 = \left[x^2+2x\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^3 =$$

$$= \left[\left(0^2+2\cdot 0\right)-\left((-1)^2+2\cdot(-1)\right)\right]+\left[\left(\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+2\cdot 3\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+2\cdot 0\right)\right]=$$

$$= [0-(-1)]+\left[\left(9+\frac{9}{2}+6\right)-0\right]=1+\frac{39}{2}=\frac{41}{2}$$

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2}$

Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

Solución.

Integral inmediata del tipo logarítmico:

$$\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\frac{3x}{x^2-2}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\text{Ln}|f(x)|+C\\ f(x)=x^2-2:f'(x)=2x\end{array}\right\}=\frac{3}{2}\int_2^3\frac{2x}{x^2-2}\,dx=\left(\frac{3}{2}\text{Ln}\left|x^2-2\right|\right]_2^3=$$

$$=\frac{3}{2}\text{Ln}\left|3^2-2\right|-\frac{3}{2}\text{Ln}\left|2^2-2\right|=\frac{3}{2}(\text{Ln}7-\text{Ln}2)=\frac{3}{2}\text{Ln}\frac{7}{2}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$

Calcúlese el valor de b para que $\int_0^3 f(x)dx=6$

Solución.

Teniendo en cuenta la definición de la función:

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3\frac{x^2-b}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^3\left(x^2-b\right)dx=\left(\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-bx\right)\right]_0^3=6$$

$$\left(\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-bx\right)\right]_0^3=\frac{1}{4}\left(\frac{3^3}{3}-b\cdot 3\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{0^3}{3}-b\cdot 0\right)=6$$

$$\frac{1}{4}\left(3^2-b\cdot 3\right)=6\ :\ 9-3b=24\ :\ 3b=-15\ :\ b=\frac{-15}{3}=-5$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<0\\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x\le 3\\ x-5 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

Para $a=4$, $b=-1$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

Solución.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<0\\ 4x-1 & \text{si} \quad 0\le x\le 3\\ x-5 & \text{si} \quad x>3\end{cases} : \int_{-1}^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\left(x^2+1\right)dx+\int_0^2(4x-1)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^0+\left(\frac{4x^2}{2}-x\right]_0^2=\left(\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^0+\left(2x^2-x\right]_0^2=$$

$$=\left(\frac{0^3}{3}+0\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right)+\left(2\cdot 2^2-2\right)-\left(2\cdot 0^2-0\right)=\frac{4}{3}+6=-\frac{22}{3}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-a & \text{si} \quad x\le -1 \\ -3x^2+b & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Para a = 0, b = 3, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Nota.– La notación log representa al logaritmo neperiano

Solución.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -3x^2+3 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \log x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$ Teniendo en cuenta la definición de la función:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)dx=\left(\frac{-3x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{1}=\left(x^3+3x\right]_{-1}^{1}=\left(1^3+3\cdot 1\right)-\left((-1)^3+3\cdot(-1)\right)=$$
$$=4-(-4)=8$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

Para $a=-1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_{o}^{b} f(x)\cdot dx=0$

Solución.

$$\int_{o}^{b}\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\left\{\begin{array}{c}\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\text{Ln}\left|f(x)\right|+C \\ f(x)=x^2-x+1 \\ f'(x)=2x-1\end{array}\right\}=\left(\text{Ln}\left|x^2-x+1\right|\right)_{0}^{b}=$$

$$=\text{Ln}\left|b^2-b+1\right|-\text{Ln}\left|0^2-0+1\right|=\text{Ln}\left|b^2-b+1\right|-\text{Ln}\left|1\right|=\text{Ln}\left|b^2-b+1\right|-0=0$$

$$\text{Ln}\left|b^2-b+1\right|=0\Leftrightarrow b^2-b+1=e^0:b^2-b+1=1:b^2-b=0:b\cdot(b-1)=0:\begin{cases}b=0\\ b=1\end{cases}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{Si} \quad x<2 \\ x+a & \text{Si} \quad 2\le x\le 5 \\ -x^2+5x+b & \text{Si} \quad x>5 \end{cases} \quad (a,\, b\in\Re)$$

Para a = 1, b = 6, calcúlese la integral definida $\int_{3}^{6} f(x)dx$

Solución.

Para a = 1, b = 6: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{Si} \quad x<2 \\ x+1 & \text{Si} \quad 2\le x\le 5 \\ -x^2+5x+6 & \text{Si} \quad x>5 \end{cases}$

En el intervalo de integración [3, 6], la función tiene dos expresiones diferentes, por lo que la integral $\int_3^6 f(x)dx$ hay que descomponerla en suma de dos integrales.

$$\int_3^6 f(x)dx = \int_3^5 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx = \int_3^5 (x+1)\,dx + \int_5^6 \left(-x^2+5x+6\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right]_3^5 + \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right]_5^6 =$$

$$= \left(\frac{5^2}{2}+5\right)-\left(\frac{3^2}{2}+3\right)+\left(-\frac{6^3}{3}+\frac{5\cdot 6^2}{2}+6\cdot 6\right)-\left(-\frac{5^3}{3}+\frac{5\cdot 5^2}{2}+6\cdot 5\right)=$$

$$\frac{35}{2}-\frac{15}{2}+54-\frac{305}{6}=\frac{79}{6}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}$$

Calcúlese la integral definida: $\int_3^5 \left(x^2-4\right)f(x)\,dx$

Solución.

$$\int_3^5 \left(x^2-4\right)f(x)\,dx = \int_3^5 \left(x^2-4\right)\frac{x^2+2}{x^2-4}\,dx = \int_3^5 \left(x^2+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right]_3^5 =$$

$$= \left(\frac{5^3}{3}+2\cdot 5\right)-\left(\frac{3^3}{3}+2\cdot 3\right)=\frac{110}{3}u^2$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x}$$

Calcúlese la integral definida $\int_1^2 f(x)\,dx$

Solución.

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x+1+\frac{2}{x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x+2\,\mathrm{Ln}\,x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2}+2+2\,\mathrm{Ln}\,2\right)-\left(\frac{1^2}{2}+1+2\,\mathrm{Ln}\,1\right)=\frac{5}{2}-2\,\mathrm{Ln}\,2$$

Calcular la integral definida

$$\int_{-1}^1 \left(|x|+x+1\right)dx$$

Nota.- La notación $|x|$ representa el valor absoluto de x.

Solución.

Se pide calcular la integral definida de una función en cuya expresión aparece el valor absoluto de x, siendo necesaria por tanto expresar la función sin el valor absoluto.

$$f(x)=|x|+x+1=\begin{cases}-x+x+1 & \text{Sí} \quad x<0 \\ x+x+1 & \text{Sí} \quad x\le 0\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{Sí} \quad x<0 \\ 2x+1 & \text{Sí} \quad x\le 0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}(|x|+x+1)dx=\int_{-1}^{0}1\cdot dx+\int_{0}^{1}(2x+1)\cdot dx=[x]_{-1}^{0}+\left[\frac{2x^2}{2}+x\right]_{0}^{1}=(0-(-1))+\left[1^2+1-(0^2+0)\right]=3$$

Calcular el valor de a > 0 en los siguientes casos:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx=a$

b) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx=3$

c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx=5$

Solución:

a. $$\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx=\mathrm{Ln}(x+1)]_0^3=\mathrm{Ln}(3+1)-\mathrm{Ln}(0+1)=\mathrm{Ln}\,4-\mathrm{Ln}\,1=\mathrm{Ln}\,4=a$$

b. $$\int_0^a \frac{1}{x+1}dx=\mathrm{Ln}(x+1)]_0^a=\mathrm{Ln}(a+1)-\mathrm{Ln}(0+1)=\mathrm{Ln}(a+1)-\mathrm{Ln}\,1=\mathrm{Ln}(a+1)=3$$

$$a+1=e^3:\ a=e^3-1$$

c. $$\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx=\mathrm{Ln}(x+a)]_0^3=\mathrm{Ln}(3+a)-\mathrm{Ln}(0+a)=\mathrm{Ln}\left(\frac{3+a}{a}\right)=5$$

$$\frac{3+a}{a}=e^5\ :\ 3+a=a\cdot e^5\ :\ a\cdot e^5-a=3:\ a\cdot\left(e^5-1\right)=3$$

$$a=\frac{3}{\left(e^5-1\right)}$$