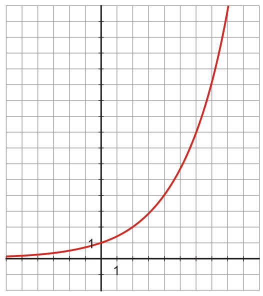
## Exponenciales y logarítmicas

**EJERCICIO 27 : Representa las siguientes funciones haciendo en cada caso una tabla de valores:**
**a)** $y = 2^{0,5x}$ **b)** $y = -\log_6 x$

*Solución:*

a) $y = 2^{0,5x}$ equivale a $y = 2^{\frac{x}{2}}$

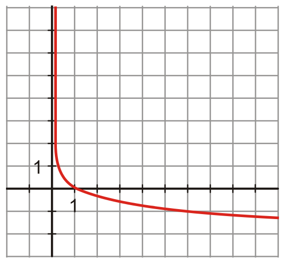
| X | -∞ | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | +∞ |



Se observa en la gráfica que es una función creciente, cosa que ya sabíamos puesto que $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$.

b)

| X | $6^{-\infty}$ | $6^{-2}$ | $6^{-1}$ | $6^{0}$ | $6^{1}$ | $6^{2}$ | $6^{+\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | $0^{+}$ | 1/36 | 1/6 | 1 | 6 | 36 | +∞ |
| y | +∞ | +2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -∞ |



**EJERCICIO 28**
**a)** **Pon en forma exponencial $4^{0,5x}$ y representa la función $y = 4^{0,5x}$.**

**b)** **Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = \log_5 x$ los puntos $(-1, 2)$, $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$, (3,-2) y (25,2)**

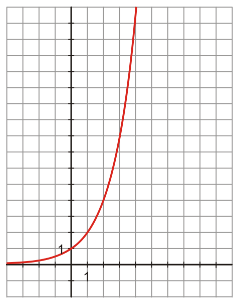
*Solución:*

a) $4^{0,5x} = \left(4^{0,5}\right)^x = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{4}\right)^x = 2^x$

Representar la función $y = 4^{0,5x}$ equivale a representar la función $y = 2^x$.

Hacemos una tabla de valores:

| X | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | +∞ |



b) El dominio de definición de $y = log_5 x$ es $(0, +\infty)$, luego el punto $(-1, 2)$ no pertenece al dominio por ser $x = -1 < 0$. El resto de puntos tienen abscisa positiva, luego pueden pertenecer a la gráfica de la función:

$$\left.\begin{array}{l} (5,1) \rightarrow 1 = log_5 5 \rightarrow 5^1 = 5 \\ \left(\frac{1}{5},-1\right) \rightarrow -1 = log_5 \frac{1}{5} \rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \text{Pertenecen a la gráfica.}$$

$$(3,-2) \rightarrow -2 = log_5 3 \rightarrow 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \neq 3 \quad \text{No pertenece a la gráfica.}$$

$$(25, 2) \rightarrow 2 = log_5 25 \rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow \text{Pertenece a la gráfica.}$$

Los puntos que pertenecen a la gráfica son: $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$ y $(25, 2)$

## EJERCICIO 29

**a) Halla el valor de $k$ y $a$ para que la gráfica de $y = ka^x$ pase por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$.**

**Indica razonadamente si la función obtenida será creciente o decreciente, sin representarla.**

**b) Representa la función $y = 2 + log_7 x$.**

*Solución:*

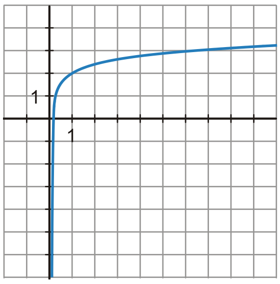
a) $y = ka^x$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = ka^{-1} \\ \frac{3}{4} = ka^2 \end{array}\right\} \frac{ka^2}{ka^{-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{6} \rightarrow a^3 = \frac{3}{24} \rightarrow a^3 = \frac{1}{8} \rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow 6 = k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow k = 6a \rightarrow k = 6 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow k = 3$$

La función es $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$, función decreciente por ser $a = \frac{1}{2} < 1$.

b)

| X | $7^{-\infty}$ | $7^{-2}$ | $7^{-1}$ | $7^0$ | $7^1$ | $7^2$ | $7^{+\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1/49 | 1/7 | 1 | 7 | 49 | $+\infty$ |
| y | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $+\infty$ |



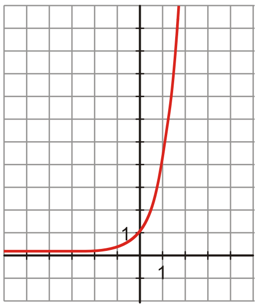

**EJERCICIO 30 : Escribe el dominio de la función $y = 4^x$ y represéntala gráficamente. Escribe la expresión analítica y representa la función inversa de $y = 4^x$.**

*Solución:*

- $y = 4^x$ es una función exponencial $\rightarrow$ su dominio son todos los números reales.

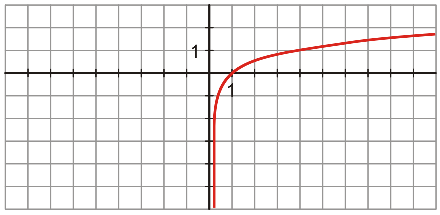
Hagamos una tabla de valores para representarla:

| X | $-\infty$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1/16 | ¼ | 1 | 4 | 16 | $+\infty$ |



- La expresión analítica de la función inversa de $y = 4^x$ es $y = log_4 x$, cuya tabla de valores será:

| X | 0 | 1/16 | ¼ | 1 | 4 | 16 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |



**EJERCICIO 31**

**a) Construye la gráfica de $y = 0{,}7^x$ y, apartir de ella, representa la función $y = 0{,}7^x + 2$.**

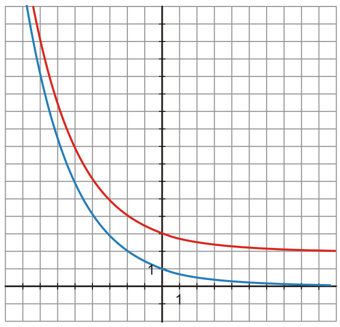
**b) Indica cuál es el dominio de la función $y = log\ x$ y escribe tres puntos que pertenezcan a la gráfica.**

*Solución:*

a) $y = 0{,}7^x$: función exponencial de base $a = 0{,}7 < 1$, luego decrece en su dominio, que es $\mathbb{R}$.

- Hagamos una tabla de valores:

| X | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | +∞ | 2,0 | 1,43 | 1 | 0,7 | 0,49 | 0 |



La función $y = 0{,}7^x + 2$ se obtiene desplazando dos unidades hacia arriba la gráfica anterior, o lo que es igual, sumando 2 unidades a los valores obtenidos anteriormente para $y$.

b) $y = log_{10} x \quad \rightarrow \quad$ dominio de definición: $(0, +\infty)$

$(10, 1) \rightarrow 1 = log_{10} 10$

$(100, 2) \rightarrow 2 = log_{10} 100 \rightarrow 10^2 = 100$

$\left(\frac{1}{10}, -1\right) \rightarrow -1 = log_{10} \frac{1}{10} \rightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10}$

**EJERCICIO 32** : **Calcula, usando la definición de logaritmo, y sin calculadora:**

**a)** $\log_3 \sqrt[5]{81}$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_4 \frac{1}{64}$ **d)** $\log_5 \frac{1}{25}$ **e)** $\log_5 \sqrt[4]{5}$ **f)** $\log_5 25$

**g)** $\log_7 \sqrt[3]{49}$ **h)** $\log_2 512$ **i)** $\log_5 0{,}008$ **j)** $\log_2 \sqrt[4]{4}$ **k)** $\log_2 0{,}5$ **l)** $\log_2 256$

**m)** $\log \sqrt{0{,}01}$ **n)** $\log_6 \frac{5}{30}$ **ñ)** $\log_3 243$

*Solución:*

a) $log_3 \sqrt[5]{81} = log_3 \sqrt[5]{3^4} = log_3 3^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \underbrace{log_3 3}_{1} = \frac{4}{5}$

b) $log\ 0{,}001 = log\ 10^{-3} = -3 \underbrace{log\ 10}_{1} = -3$

c) $log_4 \frac{1}{64} = \underbrace{log_4 1}_{0} - log_4 64 = -log_4 4^3 = -3 \underbrace{log_4 4}_{1} = -3$

d) a) $log_5 \frac{1}{25} = \underbrace{log_5 1}_{0} - log_5 25 = -log_5 5^5 = -2 \underbrace{log_5 5}_{1} = -2$

e) b) $log_5 \sqrt[4]{5} = log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \underbrace{log_5 5}_{1} = \frac{1}{4}$

f) $log_5 125 = log_5 5^3 = 3\ log_5 5 = 3$

g) a) $log_7\sqrt[3]{49} = log_7\sqrt[3]{7^2} = log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\underbrace{log_7 7}_{1} = \frac{2}{3}$

h) b) $log_2 512 = log_2 2^9 = 9\cdot\underbrace{log_2 2}_{1} = 9$

i) c) $log_5 0{,}008 = log_5\frac{8}{1000} = log_5\frac{1}{125} = log_5 5^{-3} = -3\underbrace{log_5 5}_{1} = -3$

j) a) $log_2\sqrt[4]{4} = log_2\sqrt[4]{2^2} = log_2 2^{\frac{2}{4}} = log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\underbrace{log_2 2}_{1} = \frac{1}{2}$

k) b) $log_2 0{,}5 = log_2\frac{1}{2} = log_2 2^{-1} = -1 log_2 2 = -1$

l) c) $log_2 256 = log_2 2^8 = 8\ log_2 2 = 8$

m) a) $log\sqrt{0{,}01} = log\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}log\ 10^{-2} = -\frac{2}{2}\underbrace{log 10}_{1} = -1$

n) b) $log_6\frac{5}{30} = log_6\frac{1}{6} = log_6 6^{-1} = -1\underbrace{log_6 6}_{1} = -1$

ñ) c) $log_3 243 = log_3 3^5 = 5\cdot\underbrace{log_3 3}_{1} = 5$

**<u>EJERCICIO 33</u> : Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $5^{2x^2+1} = 125$ **b)** $\log_3(5x-3) = 3$ **c)** $2^{2x-6} = 0{,}25^{x-1}$ **d)** $\log_5(2x^2 - x) = 0$

**e)** $\sqrt[5]{49} = 7^{x^2+\frac{6}{25}}$ **f)** $\log_2(x-1) = 2$ **g)** $3^{3x-1} = 9^{x+6}$ **h)** $\log_2(x^2-5x+8) = 2$

**i)** $4^{x^2-8x} = 1$ **j) log (11x – 1) = -1**

*Solución:*

a) Expresamos como potencia de 5 el segundo miembro e igualamos los exponentes:

$5^{2x^2+1} = 125 \rightarrow 5^{2x^2+1} = 5^3 \rightarrow 2x^2+1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

b) Aplicamos la definición de logaritmo:

$log_3 (5x - 3) = 3 \rightarrow 5x - 3 = 3^3 \rightarrow 5x - 3 = 27 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

<u>Comprobación de la solución</u> $log_3 (5\cdot 6 - 3) = log_3 27 = log_3 3^3 = 3\cdot log_3 3 = 3 \rightarrow$ Solución válida

c) Expresamos el segundo miembro como potencia de 2. A continuación, igualamos exponentes:

$$2^{2x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

$$2^{2x-6} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1} \rightarrow 2^{2x-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = \left(2^{-1}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = 2^{-2x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 6 = -2x + 2 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

d) $log_5 (2x^2 - x) = 0$, aplicando la definición de logaritmo, equivale a $2x^2 - x = 5^0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2 - x = 1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

*<u>Comprobación de las soluciones</u>*

Si $x = 1 \rightarrow log_5 (2 - 1) = log_5 1 = 0 \rightarrow x = 1$ es solución.

Si $x = \frac{-1}{2} \rightarrow log_5\left(2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = log_5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = log_5 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$ también es solución.

e) Expresamos el primer miembro como potencia de 7 e igualamos exponentes:

$$\sqrt[5]{49} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \sqrt[5]{7^2} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow 7^{\frac{2}{5}} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \frac{2}{5} = x^2 + \frac{6}{25} \rightarrow x^2 = \frac{2}{5} - \frac{6}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \rightarrow x = \pm\frac{2}{5}$$

f) Aplicando la definición de logaritmo, se obtiene:

$$log_2(x-1) = -2 \rightarrow x - 1 = 2^{-2} \rightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} + 1 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Comprobación de la solución: $log_2\left(\frac{5}{4}-1\right)=log_2\frac{1}{4}=log_2 2^{-2}=-2log_2 2=-2 \rightarrow$ válida

La solución es: $x=\frac{5}{4}$

g) Expresamos como potencia de 3 el segundo miembro e igualamos exponentes:

$3^{3x-1}=9^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1}=(3^2)^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1}=3^{2x+10} \rightarrow 3x-1=2x+10 \rightarrow x=11$

h) $log_2(x^2-5x+8)=2 \rightarrow x^2-5x+8=2^2$ (hemos aplicado la definición de logaritmo) $\rightarrow$

$\rightarrow x^2-5x+8=4 \rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}$ $\begin{array}{l}\nearrow 4\\ \searrow 1\end{array}$

Comprobación de las soluciones

Si $x=4 \rightarrow log_2(16-20+8)=log_2 4=log_2 2^2=2\,log_2 2=2 \rightarrow x=4$ es solución.

Si $x=1 \rightarrow log_2(1-5+8)=log_2 4=log_2 2^2=2\,log_2 2=2 \rightarrow x=1$ es solución.

i) a) $4^{x^2-3x}=1$ equivale a $4^{x^2-3x}=4^0$

Igualando exponentes: $x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0$

Luego $x=0$ y $x=3$ son las soluciones.

j) $log(11x-1)=-1$ equivale a $11x-1=10^{-1}$ (hemos aplicado la definición de logaritmo)

$11x-1=\frac{1}{10} \rightarrow 11x=\frac{1}{10}+1 \rightarrow 11x=\frac{11}{10} \rightarrow x=\frac{1}{10}$

Comprobación de la solución $log\left(\frac{11}{10}-1\right)=log\frac{1}{10}=log\,10^{-1}=-1\,log\,10=-1$

La solución $x=\frac{1}{10}$ es válida.

## Problemas

**EJERCICIO 34 : Colocamos en el banco 25000 € al 5% de interés anual.**

**a) Escribe la función que expresa el capital acumulado en función del tiempo, *t*, que permanezca el dinero en el banco.**

**b) ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?**

*Solución:*

a) $C$ = capital acumulado

5% de interés anual significa que el capital que hay a principios de año se multiplica por 1,05 al final. La expresión que da el capital acumulado al cabo de $t$ años es: $C=25000\cdot 1{,}05^t \quad t\geq 0$

b) Nos piden calcular $t$ para que el capital se duplique:

$25000\cdot 1{,}05^t=50000 \rightarrow 1{,}05^t=2 \rightarrow t\approx 15$ años

Tardará en duplicarse, aproximadamente, 15 años.

**EJERCICIO 35 : Se cerca una finca rectangular de área *A* con 42 m de alambrada, sin que sobre ni falte nada.**

**a) Expresa el área de la finca en función de uno de sus lados**

**b) Representa gráficamente la expresión anterior.**

**c) ¿Cuál es el dominio de definición?**

**d) ¿Para qué valor de los lados obtenemos la finca de área máxima?**

*Solución:*

Las dimensiones de la finca son $x$, $21-x$.

a) $A$ = área de la finca

La expresión analítica buscada es $A(x)=x(21-x) \rightarrow A(x)=-x^2+21x$, que es una función cuadrática.

b) Será una parábola abierta hacia abajo:

- Vértice: $x=\frac{21}{2}$ $\quad y=-\frac{441}{4}+\frac{441}{2}=\frac{441}{4}=110{,}25 \Rightarrow V(10{,}5;\,110{,}25)$