

10 Cálculo de derivadas



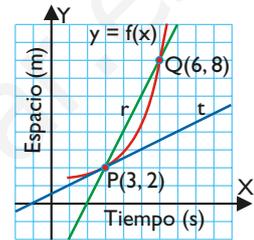
1. La derivada

■ Piensa y calcula

La gráfica $y = f(x)$ representa el espacio que recorre un coche en función del tiempo.

Calcula mentalmente:

- la pendiente de la recta secante, r , que pasa por P y Q
- la distancia media recorrida entre 3 s y 6 s
- la pendiente de la recta tangente t en el punto P



Solución:

a) 2

$$\text{b) } \text{TVM}[3, 6] = \frac{8 - 2}{6 - 3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ m}$$

c) 1/2

● Aplica la teoría

1. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$ en $[1, 2]$

d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en $[-1, 2]$

Solución:

$$\text{a) } \text{TVM}[1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{5 - (-1)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{b) } \text{TVM}[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{2 - (-2)}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{c) } \text{TVM}[1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - (-1/2)}{2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \text{TVM}[-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

2. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 2$ en $x = 1$ b) $f(x) = -2x + 1$ en $x = -3$ c) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$ d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $x = 1$

Solución:

$$a) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h) - 2 - (3-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h - 2 - 3 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$b) f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(-3+h) + 1 - [-2 \cdot (-3) + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 2h + 1 - 6 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2$$

$$c) f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 4 - [(-2)^2 - 4]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4+h) = -4$$

$$d) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 5(1+h) - 3 - (-1^2 + 5 \cdot 1 - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 3 - 1 - 5 + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h+3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h+3) = 3$$

3. Aplica la definición de derivada y calcula:

- la derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$
- las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$
- Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

$$a) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

La recta tangente: $m = f'(1) = 2$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

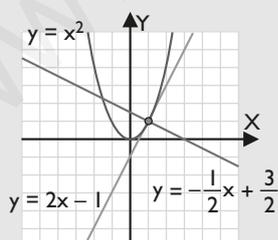
$$y = 2x - 1$$

La recta normal:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

c)



4. Aplica la definición de derivada y calcula:

- la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$
- las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$
- Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

$$a) f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) + 1 - (3^2 - 2 \cdot 3 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h + 1 - 9 + 6 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4$$

b) Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow P(3, 4)$

La recta tangente: $m = f'(3) = 4$

$$y - 4 = 4(x - 3)$$

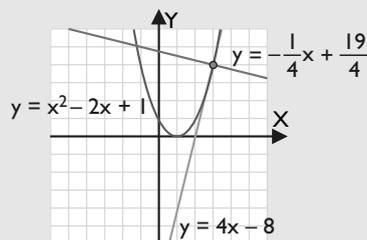
$$y = 4x - 8$$

La recta normal:

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$$

c)



5. El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde x representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas.

Solución:

$$TVM[3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{32 - 8}{5 - 3} = \frac{24}{2} = 12 \text{ bacterias/h}$$

9. Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + x + h - (x^2 + x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) = 2x + 1 \\ 2x + 1 &= 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2 \end{aligned}$$

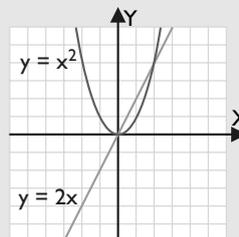
10. Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

- Calcula su función derivada.
- Representa la función derivada en los mismos ejes coordenados.
- Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma estos valores: 1, 2, -1, -2, 0

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

b)



c) $x = 1/2, x = 1, x = -1/2, x = -1, x = 0$

3. Reglas de derivación

■ Piensa y calcula

Clasifica las siguientes funciones como polinómicas, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas:

a) $y = 2^x$ b) $y = x^5$ c) $y = \text{sen } x$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = L x$

Solución:

a) Exponencial. b) Polinómica. c) Trigonométrica. d) Irracional. e) Logarítmica.

● Aplica la teoría

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

11. a) $y = 8$ b) $y = -3x + 1$

Solución:

a) $y' = 0$ b) $y' = -3$

12. a) $y = x^2 + 4x - 5$ b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$

Solución:

a) $y' = 2x + 4$ b) $y' = 4x^3 - 6x$

13. a) $y = (x - 8)^2$ b) $y = (3x^2 + 1)^3$

Solución:

a) $y' = 2(x - 8)$ b) $y' = 18x(3x^2 + 1)^2$

14. a) $y = (x^2 + 4)^2$ b) $y = (x^4 - 1)^3$

Solución:

a) $y' = 4x(x^2 + 4)$ b) $y' = 12x^3(x^4 - 1)^2$

15. a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ b) $y = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$

Solución:

a) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ b) $y' = \frac{3x^2 - 2}{4\sqrt[3]{(x^3 - 2x)^3}}$

16. a) $y = e^{3x-2}$ b) $y = 2^{x^3+5}$

Solución:

a) $y' = 3e^{3x-2}$ b) $y' = 3x^2 2^{x^3+5} \ln 2$

17. a) $y = L(3x - 2)$ b) $y = \log(2x^3 + x)$

Solución:

a) $y' = \frac{3}{3x - 2}$ b) $y' = \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x} \log e$

18. a) $y = \text{sen}(3x - 7)$ b) $y = \cos(x^2 + 4x)$

Solución:

a) $y' = 3\cos(3x - 7)$
 b) $y' = -(2x + 4) \text{sen}(x^2 + 4x)$

19. a) $y = x^2 + \text{tg } x$ b) $y = x L x$

Solución:

a) $y' = 2x + \sec^2 x$
 b) $y' = 1 + L x$

20. a) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{e^x}{\cos x}$

Solución:

a) $y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$
 b) $y' = \frac{e^x(\text{sen } x + \cos x)}{\cos^2 x}$

21. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

$y''' = -\frac{6}{x^4}$

22. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

$f(1) = -2 \Rightarrow P(1, -2)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Recta tangente:

$f'(1) = -3$

$y + 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 1$

Recta normal:

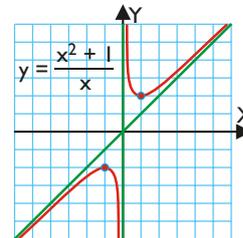
$y + 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$

4. Máximos, mínimos relativos y monotonía

■ Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ y halla:

- a) los máximos y mínimos relativos.
 b) la monotonía, es decir:
- intervalos donde es creciente (\nearrow)
 - intervalos donde es decreciente (\searrow)



Solución:

a) Máximo relativo: $A(-1, -2)$

Mínimo relativo: $B(1, 2)$

b) Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

● Aplica la teoría

23. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

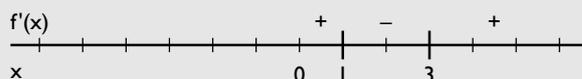
$$x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y''(1) = -6 < 0 (-) \Rightarrow A(1, 4) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(3) = 6 > 0 (+) \Rightarrow B(3, 0) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(1, 3)$

24. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2$$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''(0) = -6 < 0 (-) \Rightarrow O(0, 0) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(2) = 6 > 0 (+) \Rightarrow A(2, -4) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(0, 2)$

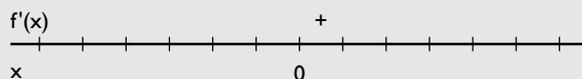
25. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y' \neq 0 \Rightarrow \text{No tiene ni máximos ni mínimos relativos.}$$



Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (\searrow): \emptyset

26. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Solución:

$$y' = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow A(1, 1/4)$$

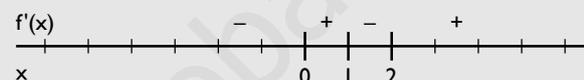
$$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$$

$$y'' = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y''(0) = 2 > 0 (+) \Rightarrow O(0, 0) \text{ mínimo relativo.}$$

$$y''(1) = -1 < 0 (-) \Rightarrow A(1, 1/4) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(2) = 2 > 0 (+) \Rightarrow B(2, 0) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

27. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

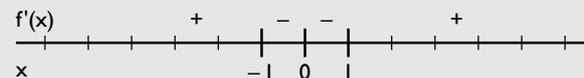
$$x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''(-1) = -2 < 0 (-) \Rightarrow A(-1, -2) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(1) = 2 > 0 (+) \Rightarrow B(1, 2) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

28. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

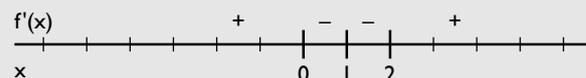
$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(2, 3)$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y''(0) = -2 < 0 (-) \Rightarrow A(0, -1) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(2) = 2 > 0 (+) \Rightarrow B(2, 3) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, 2)$

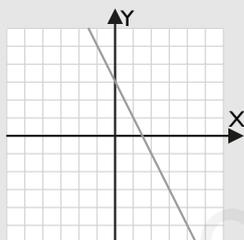
29. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta: $y = -2x + 3$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$$y' = -2 < 0 \Rightarrow \text{Es siempre decreciente.}$$

La gráfica de la función es una recta de pendiente $m = -2$, que es la derivada.



30. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

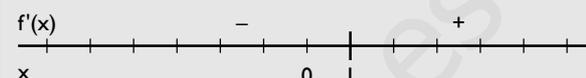
$$y' = 2x - 2$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(1, -4)$$

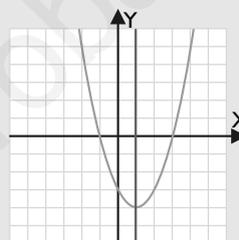
$$y'' = 2$$

$$y''(1) = 2 > 0 (+) \Rightarrow A(1, -4) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, 1)$



Tiene un mínimo relativo; antes del eje es decreciente, y después, creciente.

5. Puntos de inflexión y curvatura

■ Piensa y calcula

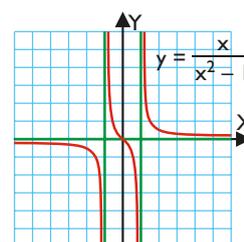
Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ y halla visualmente el punto de inflexión y los intervalos donde es convexa (\cup), y cóncava (\cap)

Solución:

Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Convexa (\cup): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



● Aplica la teoría

31. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Solución:

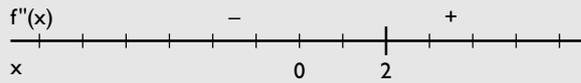
$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(2, 3)$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(2, 3)$



Convexa (\cup): $(2, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 2)$

32. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x$$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2)$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(1, 2)$



Convexa (\cup): $(1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$

33. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = (x - 1)^3 + 1$$

Solución:

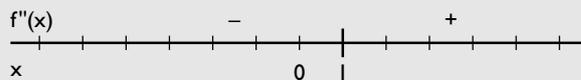
$$y' = 3(x - 1)^2$$

$$y'' = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(1, 1)$



Convexa (\cup): $(1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$

34. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2$$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 12x$$

$$y'' = 12x^2 - 12$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow A(-1, -5)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow B(1, -5)$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(1) = 24 \neq 0$$

$$y'''(-1) = -24 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(-1, -5), B(1, -5)$



Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-1, 1)$

35. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 + 4x^3 + 2$$

Solución:

$$y' = 4x^3 + 12x^2$$

$$y'' = 12x^2 + 24x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$$

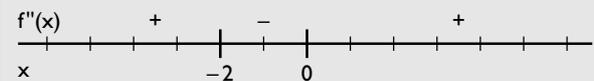
$$x = -2 \Rightarrow y = -14 \Rightarrow B(-2, -14)$$

$$y''' = 24x + 24$$

$$y'''(0) = 24 \neq 0$$

$$y'''(-2) = -24 \neq 0$$

Puntos de inflexión: $A(0, 2), B(-2, -14)$



Convexa (\cup): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-2, 0)$

36. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x-1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{2-x}{x^3}$$

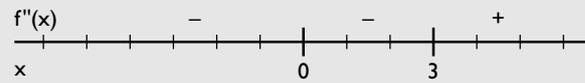
$$y'' = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2/9 \Rightarrow A(3, 2/9)$$

$$y''' = \frac{6(4-x)}{x^5}$$

$$y'''(3) = 2/81 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(3, 2/9)$



Convexa (\cup): $(3, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

37. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

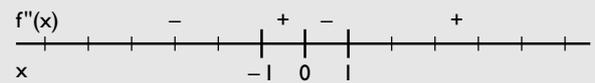
$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$y'''(0) = -6 \neq 0$$

Punto de inflexión: $O(0, 0)$



Convexa (\cup): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

38. Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$

b) $y = x^6$

Solución:

a) $y' = 5x^4$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$y'' = 20x^3$$

$$y''' = 60x^2$$

$$y^{IV} = 120x$$

$$y^V = 120$$

Punto de inflexión en $O(0, 0)$

b) $y' = 6x^5$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$y'' = 30x^4$$

$$y''' = 120x^3$$

$$y^{IV} = 360x^2$$

$$y^V = 720x$$

$$y^{VI} = 720$$

Mínimo en $O(0, 0)$

Ejercicios y problemas

1. La derivada

39. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

- a) $f(x) = -3x + 5$ en $[-1, 2]$
 b) $f(x) = x^2 - 6x - 4$ en $[1, 3]$
 c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ en $[-1, 3]$
 d) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $[-3, 0]$

Solución:

a) $TVM[-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-1 - 8}{2 - (-1)} = \frac{-9}{3} = -3$
 b) $TVM[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-13 - (-9)}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$
 c) $TVM[-1, 3] = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{0 - (-4)}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$
 d) $TVM[-3, 0] = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{2 - 1}{0 - (-3)} = \frac{1}{3}$

40. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

- a) $f(x) = 5x - 3$ en $x = -4$ b) $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$ c) $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = -1$ d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x = 1$

Solución:

a) $f'(-4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(-4+h) - 3 - [5 \cdot (-4) - 3]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-20 + 5h - 3 + 20 + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5$
 b) $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h) + 2 - (-3 + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 - h + 2 + 3 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$
 c) $f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(-1+h)^2 + 5 - [-(-1)^2 + 5]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + 2h - h^2 + 5 + 1 - 5}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2-h) = 2$
 d) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 + 5(1+h) - 4 - (3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 4)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 + 5 + 5h - 4 - 3 - 5 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 11h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 11)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 11) = 11$

41. Aplica la definición de derivada y calcula:

- a) la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = 1$
 b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$
 c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

a) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 1 - (1^2 + 4 \cdot 1 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 1 - 1 - 4 + 1}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow P(1, 4)$

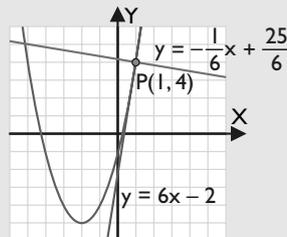
La recta tangente:

$m = f'(1) = 6$
 $y - 4 = 6(x - 1)$
 $y = 6x - 2$

La recta normal:

$y - 4 = -\frac{1}{6}(x - 1)$
 $y = -\frac{1}{6}x + \frac{25}{6}$

c)



Ejercicios y problemas

42. El número de llamadas que se reciben en una centralita es: $f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$, donde x se expresa en horas, y $f(x)$, en miles de llamadas.

Calcula el número medio de llamadas que se reciben entre las 2 y las 4 horas; y entre las 4 y las 6 horas. ¿Cómo interpretas los resultados?

Solución:

$$\text{a) TVM}[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{8 - 6}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{b) TVM}[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6 - 8}{6 - 4} = \frac{-2}{2} = -1$$

Entre 2 y 4 la función es creciente y entre 4 y 6 es decreciente. Debe presentar un máximo en $x = 4$

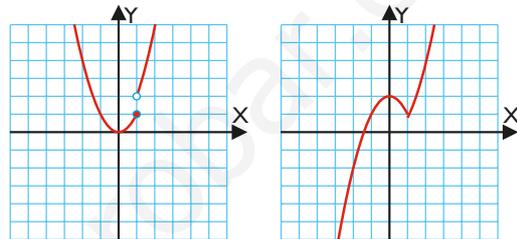
2. La función derivada

43. Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 1$

Solución:

a) No, porque es discontinua.

b) No, porque se pueden dibujar dos rectas tangentes de pendientes distintas en $x = 1$



44. Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 - (2x^2 - 4x + 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 3 - 2x^2 + 4x - 3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 4x - 4h + 3 - 2x^2 + 4x - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h - 4) = 4x - 4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+h+2} - \frac{3}{x+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x+6-3x-3h-6}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{(x+h+2)(x+2)h} = -\frac{3}{(x+2)^2}$$

45. Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Calcula:

a) el valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 2$

b) el valor de la abscisa en el que la derivada vale $1/4$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{a) } f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

3. Reglas de derivación

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

46. a) $y = 3x^2 + x - 7$ b) $y = -x^4 + x^2 - 6x$

Solución:

a) $y' = 6x + 1$
b) $y' = -4x^3 + 2x - 6$

47. a) $y = 2x^3 + x^2 - 5$ b) $y = 3x^4 + 5x + 1$

Solución:

a) $y' = 6x^2 + 2x$
b) $y' = 12x^3 + 5$

48. a) $y = (x^3 - 1)^2$ b) $y = (x^3 + 1)^4$

Solución:

a) $y' = 6x^2(x^3 - 1)$
b) $y' = 12x^2(x^3 + 1)^3$

49. a) $y = (2x^3 + x^2)^3$ b) $y = (2x^4 - 1)^5$

Solución:

a) $y' = 3(6x^2 + 2x)(2x^3 + x^2)^2$
b) $y' = 40x^3(2x^4 - 1)^4$

50. a) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ b) $y = \sqrt{x^3 - x}$

Solución:

a) $y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$
b) $y' = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$

51. a) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $y' = \frac{3x^2 - 1}{5\sqrt[5]{(x^3 - x)^4}}$
b) $y' = \frac{2x + 4}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4x)^2}}$

52. a) $y = e^{2x^3}$ b) $y = e^{7x}$

Solución:

a) $y' = 6x^2 e^{2x^3}$
b) $y' = 7e^{7x}$

53. a) $y = 7^{2x+3}$ b) $y = e^{-x^2+2}$

Solución:

a) $y' = 2 \cdot 7^{2x+3} \cdot L 7$
b) $y' = -2x e^{-x^2+2}$

54. a) $y = L(5x^3 - 3x)$ b) $y = L(x^4 - x^2)$

Solución:

a) $y' = \frac{15x^2 - 3}{5x^3 - 3x}$
b) $y' = \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2} = \frac{4x^2 - 2}{x^3 - x}$

55. a) $y = \log(2x^3 + 5)$ b) $y = \log(x^2 + 4x + 1)$

Solución:

a) $y' = \frac{6x^2}{2x^3 + 5} \log e$
b) $y' = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 1} \log e$

56. a) $y = \sin(3x^2 - 4x)$ b) $y = \cos(4x^3 + x)$

Solución:

a) $y' = (6x - 4) \cos(3x^2 - 4x)$
b) $y' = -(12x^2 + 1) \sin(4x^3 + x)$

57. a) $y = \sin(x^3 + 2)$ b) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$

Solución:

a) $y' = 3x^2 \cos(x^3 + 2)$
b) $y' = 2x \sec^2(x^2 - 1)$

58. a) $y = e^x + \cos x$ b) $y = x e^x$

Solución:

a) $y' = e^x - \operatorname{sen} x$
b) $y' = (x + 1)e^x$

59. a) $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 2}$ b) $y = \frac{L x}{\operatorname{sen} x}$

Solución:

a) $y' = \frac{-2x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 2)^2}$
b) $y' = \frac{(1/x)\operatorname{sen} x - L x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x - x L x \cos x}{x \operatorname{sen}^2 x}$

60. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^4 + 2x^2$

b) $y = \frac{x^3}{6} - 2x$

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

d) $y = \frac{x^2 + 4}{2x}$

Solución:

a) $y' = -4x^3 + 4x$

$y'' = -12x^2 + 4$

$y''' = -24x$

b) $y' = \frac{x^2}{2} - 2$

$y'' = x$

$y''' = 1$

c) $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\frac{2}{x^3}$

$y''' = \frac{6}{x^4}$

d) $y' = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$

$y'' = \frac{4}{x^3}$

$y''' = -\frac{12}{x^4}$

61. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^3 + 3x$

b) $y = x^4 - 4x^2$

c) $y = \frac{6}{x^2 + 3}$

d) $y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

Solución:

a) $y' = -3x^2 + 3$

$y'' = -6x$

$y''' = -6$

b) $y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

$y''' = 24x$

c) $y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'' = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$

$y''' = \frac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$

d) $y' = \frac{-x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2}$

$y'' = \frac{4}{(x - 1)^3}$

$y''' = -\frac{12}{(x - 1)^4}$

4. Máximos, mínimos relativos y monotonía

62. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

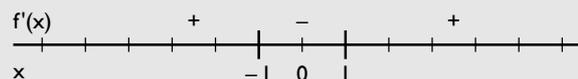
$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1, 2)$

$x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(1, -2)$

$y'' = 6x$

$y''(-1) = -6 < 0 (-) \Rightarrow A(-1, 2)$ máximo relativo.

$y''(1) = 6 > 0 (+) \Rightarrow B(1, -2)$ mínimo relativo.



Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-1, 1)$

63. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Solución:

$y' = x^2 - 4$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

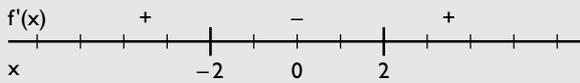
$x = -2 \Rightarrow y = 16/3 \Rightarrow A(-2, 16/3)$

$x = 2 \Rightarrow y = -16/3 \Rightarrow B(2, -16/3)$

$y'' = 2x$

$y''(-2) = -4 < 0 (-) \Rightarrow A(-2, 16/3)$ máximo relativo.

$y''(2) = 4 > 0 (+) \Rightarrow B(2, -16/3)$ mínimo relativo.



Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-2, 2)$

64. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = 2x^3 - 6x + 1$$

Solución:

$$y' = 6x^2 - 6$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

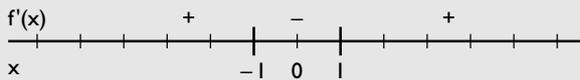
$$x = -1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(-1, 5)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(1, -3)$$

$$y'' = 12x$$

$$y''(-1) = -12 < 0 (-) \Rightarrow A(-1, 5) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(1) = 12 > 0 (+) \Rightarrow B(1, -3) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-1, 1)$

65. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = -x^3 + 6x^2 + 15x - 1$$

Solución:

$$y' = -3x^2 + 12x + 15$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5$$

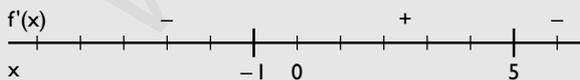
$$x = -1 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow A(-1, -9)$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 99 \Rightarrow B(5, 99)$$

$$y'' = -6x + 12$$

$$y''(-1) = 18 > 0 (+) \Rightarrow A(-1, -9) \text{ mínimo relativo.}$$

$$y''(5) = -18 < 0 (-) \Rightarrow B(5, 99) \text{ máximo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-1, 5)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

66. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

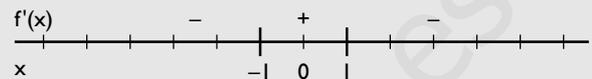
$$x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

$$y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''(-1) = 1 > 0 (+) \Rightarrow A(-1, -1) \text{ mínimo relativo.}$$

$$y''(1) = -1 < 0 (-) \Rightarrow B(1, 1) \text{ máximo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-1, 1)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

67. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

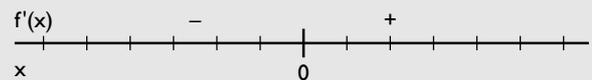
$$y' = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$y'' = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y''(0) = 2/3 > 0 (+) \Rightarrow O(0, 0) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$

68. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$$

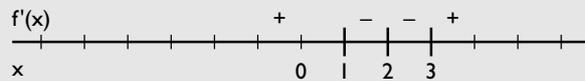
$$x = 3 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(3, 4)$$

Ejercicios y problemas

$$y'' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$y''(1) = -2 < 0 (-) \Rightarrow A(1, 0) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(3) = 2 > 0 (+) \Rightarrow B(3, 4) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(1, 2) \cup (2, 3)$

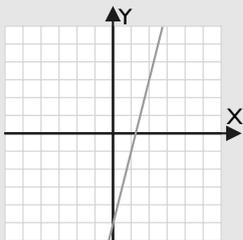
69. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

$$y = 4x - 5$$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = 4 > 0 \Rightarrow$ La función es siempre creciente.



Es una recta de pendiente 4, que es el valor de la derivada.

70. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = -2x^2 - 8x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

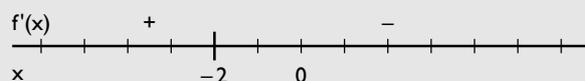
$$y' = -4x - 8$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$$

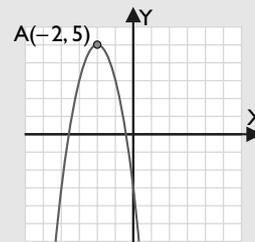
$$y'' = -4$$

$$y''(-2) = -4 < 0 (-) \Rightarrow A(-2, 5) \text{ máximo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2)$

Decreciente (\searrow): $(-2, +\infty)$



Es una parábola con eje de simetría en $x = -2$ y con el vértice en $A(-2, 5)$

5. Puntos de inflexión y curvatura

71. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x + 4$$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(0, 4)$



Convexa (\cup): $(0, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$

72. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

Solución:

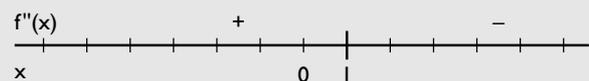
$$y' = -3x^2 + 6x$$

$$y'' = -6x + 6$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

$$y''' = -6 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(1, 3)$



Convexa (\cup): $(-\infty, 1)$

Cóncava (\cap): $(1, +\infty)$

73. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 2x^3 - 3x + 4$$

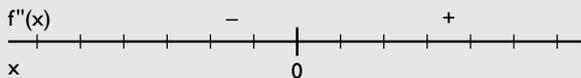
Solución:

$$y' = 6x^2 - 3$$

$$y'' = 12x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$$

$$y''' = 12 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(0, 4)$ Convexa (\cup): $(0, +\infty)$ Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$

74. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = 4x^3 - 3x^4$

Solución:

$$y' = 12x^2 - 12x^3$$

$$y'' = 24x - 36x^2$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2/3$$

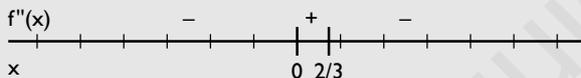
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$x = 2/3 \Rightarrow y = 16/27 \Rightarrow B(2/3, 16/27)$$

$$y''' = 24 - 72x$$

$$y'''(0) = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } O(0, 0)$$

$$y'''(2/3) = -24 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(2/3, 16/27)$ Convexa (\cup): $(0, 2/3)$ Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$

75. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 12x - 6$$

$$y'' = 12x^2 - 12$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

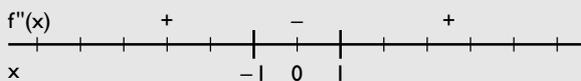
$$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1, 2)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow B(1, -10)$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } A(-1, 2)$$

$$y'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } B(1, -10)$$

Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ Cóncava (\cap): $(-1, 1)$

76. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow A(-1, 3/2)$$

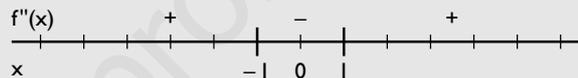
$$x = 1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow B(1, 3/2)$$

$$y''' = \frac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$$

$$y'''(-1) = -9/8 \neq 0$$

Punto de inflexión: $A(-1, 3/2)$

$$y'''(1) = 9/8 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } B(1, 3/2)$$

Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ Cóncava (\cap): $(-1, 1)$

77. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Solución:

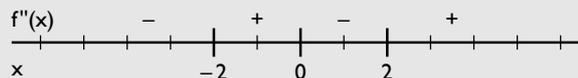
$$y' = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$y'''(0) = -3/8 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } O(0, 0)$$

Convexa (\cup): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ Cóncava (\cap): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

78. Calcula los puntos críticos de la función $y = x^3$

Solución:

$$y' = 3x^2$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

Ejercicios y problemas

$$y'' = 6x$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow O(0, 0) \text{ Punto de inflexión.}$$

79. Calcula los puntos críticos de la función $y = x^4$

Solución:

$$y' = 4x^3$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = 24 > 0 (+) \Rightarrow O(0, 0) \text{ mínimo relativo.}$$

Para ampliar

80. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

- a) $f(x) = -x + 1$ en $[-1, 2]$
 b) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ en $[2, 4]$

Solución:

$$\text{a) TVM}[-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-1 - 2}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\text{b) TVM}[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{-2 - 2}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

81. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

- a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ en $[3, 5]$
 b) $f(x) = \sqrt{x+6}$ en $[-2, 3]$

Solución:

$$\text{a) TVM}[3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{2 - 4}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{b) TVM}[-2, 3] = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{3 - 2}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}$$

82. Aplica la definición de derivada y calcula:

- a) la derivada de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 1$
 b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$
 c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

$$\text{a) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+h} - \frac{3}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - 3(1+h)}{(1+h) \cdot 1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{1+h} = -3$$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow P(1, 3)$

La recta tangente:

$$m = f'(1) = -3$$

$$y - 3 = -3(x - 1)$$

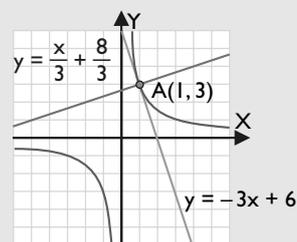
$$y = -3x + 6$$

La recta normal:

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

c)

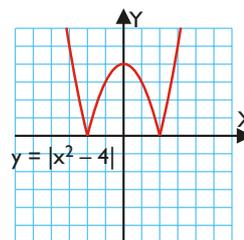


83. El espacio que recorre una motocicleta viene dado por $f(t) = t^2 + t$, donde t se expresa en segundos, y $f(t)$, en metros. Calcula la velocidad media en las dos primeras horas de movimiento.

Solución:

$$\text{TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 0}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}$$

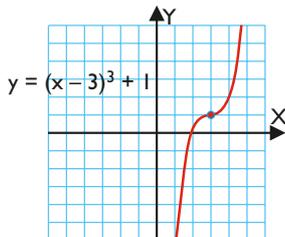
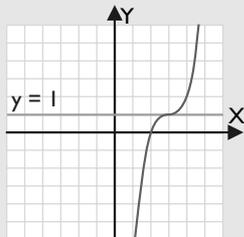
84. Analiza en qué puntos la función del gráfico no es derivable.



Solución:

En $x = -2$ y en $x = 2$ la gráfica de la función tiene picos, y se pueden dibujar, en cada uno de ellos, dos rectas tangentes con distinta pendiente. Es decir, la función no es derivable.

85. Analiza si en $x = 3$ la función del gráfico es derivable. Dibuja la recta tangente en dicho punto.

**Solución:**

La función es derivable en $x = 3$. La tangente en dicho punto es la recta $y = 1$

86. Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 3xh + h^2)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \\ \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x+h-1} - \frac{2}{x-1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x-2-2x-2h+2}{(x+h-1)(x-1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{(x+h-1)(x-1)h} = \\ &= -\frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

87. Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

Calcula:

- a) el valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 3$
b) el valor de la abscisa en el que la derivada es $-1/3$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+h-2} - \frac{3}{x-2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x-6-3x-3h+6}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{(x+h-2)(x-2)h} = \\ &= -\frac{3}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

- a) $f'(3) = -3$
b) $-\frac{3}{(x-2)^2} = -1/3 \Rightarrow x = -1, x = 5$

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

88. a) $y = (x^2 + 4)^3$
b) $y = (x^3 + 4)^2 \sin x$

Solución:

- a) $y' = 6x(x^2 + 4)^2$
b) $y' = 6x^2(x^3 + 4) \sin x + (x^3 + 4)^2 \cos x$

89. a) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{x}$
b) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \\ \text{b) } y' &= \frac{-2x^2 - 2x - 4}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

90. a) $y = \frac{e^x}{\sin x}$
b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x} \\ \text{b) } y' &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas

91. a) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y = \sqrt{L(3x-5)}$

Solución:

a) $y' = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

b) $y' = \frac{3}{2(3x-5)\sqrt{L(3x-5)}}$

92. a) $y = e^{\operatorname{sen} x}$ b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:

a) $y' = \cos x e^{\operatorname{sen} x}$

b) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

93. a) $y = e^{\sqrt{x+2}}$ b) $y = e^x L x$

Solución:

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} e^{\sqrt{x+2}}$

b) $y' = e^x \left(Lx + \frac{1}{x} \right)$

94. a) $y = e^{2x} \cos x$ b) $y = 2x + 3e^{-(x+2)}$

Solución:

a) $y' = e^{2x} (2 \cos x - \operatorname{sen} x)$

b) $y' = 2 - 3e^{-(x+2)}$

95. a) $y = L \operatorname{tg} x$ b) $y = L 5x + e^{\sqrt{x}}$

Solución:

a) $y' = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \sec x \operatorname{cosec} x$

b) $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

96. a) $y = \operatorname{tg} \sqrt{3x+2}$ b) $y = \operatorname{sen} \sqrt{2x}$

Solución:

a) $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \sec^2 \sqrt{3x+2}$

b) $y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cos \sqrt{2x}$

97. a) $y = \cos^2 x$ b) $y = \operatorname{tg}^2 x + 2^{\operatorname{sen} x}$

Solución:

a) $y' = -2 \cos x \operatorname{sen} x$

b) $y' = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x + \cos x 2^{\operatorname{sen} x} L 2$

98. a) $y = \frac{2x+1}{\cos x}$ b) $y = x \operatorname{sen} x$

Solución:

a) $y' = \frac{2 \cos x + (2x+1) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

b) $y' = \operatorname{sen} x + x \cos x$

99. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

c) $y = \frac{4}{x^2 - 1}$ d) $y = \frac{2x-1}{x^2}$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 12$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) $y' = -3x^2 + 6x - 4$

$y'' = -6x + 6$

$y''' = -6$

c) $y' = -\frac{8x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = \frac{24x^2+8}{(x^2-1)^3}$

$y''' = \frac{-96x^3-96x}{(x^2-1)^4}$

d) $y' = \frac{2-2x}{x^3}$

$y'' = \frac{4x-6}{x^4}$

$y''' = \frac{-12x+24}{x^5}$

100. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^4 + 2x^2$

b) $y = x^4 - x^3$

c) $y = \frac{x^2}{x^2+3}$

d) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Solución:

a) $y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

b) $y' = 4x^3 - 3x^2$

$y'' = 12x^2 - 6x$

$y''' = 24x - 6$

c) $y' = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'' = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$

$y''' = \frac{72x^3 - 216x}{(x^2 + 3)^4}$

d) $y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \frac{48x^3 - 48x}{(x^2 + 1)^4}$

101. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 4x + 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 1/3$

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$x = 1/3 \Rightarrow y = 4/27 \Rightarrow B(1/3, 4/27)$

$y'' = 6x - 4$

$y''(1) = 2 > 0 (+) \Rightarrow A(1, 0)$ mínimo relativo.

$y''(1/3) = -2 < 0 (-) \Rightarrow B(1/3, 4/27)$ máximo relativo.

Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$ Decreciente (\searrow): $(1/3, 1)$

102. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$$

Solución:

$y' = \frac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$

$$y'' = \frac{8(3x^2 - 6x - 1)}{(x^2 - 2x + 5)^3}$$

$y''(1) = -1/2 < 0 (-) \Rightarrow A(1, 1)$ máximo relativo.

Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1)$ Decreciente (\searrow): $(1, +\infty)$

103. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

Solución:

$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

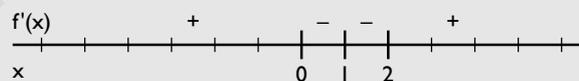
$x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(0, -4)$

$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$y'' = \frac{2}{(x - 1)^3}$

$y''(0) = -2 < 0 (-) \Rightarrow A(0, -4)$ máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0 (+) \Rightarrow B(2, 0)$ mínimo relativo.

Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, 2)$

104. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \frac{-10x}{(x^2 + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0, 5)$

$y'' = \frac{30x^2 - 10}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(0) = -10 < 0 (-) \Rightarrow A(0, 5)$ máximo relativo.

Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$ Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$

Ejercicios y problemas

105. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = -\frac{x}{2} + 3$

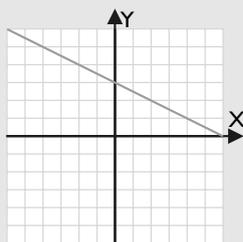
Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$$y' = -1/2 < 0$$

La derivada es menor que cero para todo valor de x ; luego la función es siempre decreciente.

La gráfica de la función es una recta de pendiente $-1/2$, que es su derivada.



106. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = \frac{x^2}{2} - x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

$$y' = x - 1$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -7/2 \Rightarrow A(1, -7/2)$$

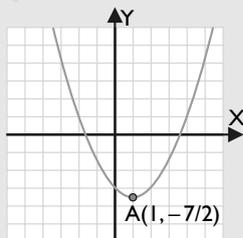
$$y'' = 1$$

$$y''(1) = 1 > 0 (+) \Rightarrow A(1, -7/2) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, 1)$



El vértice de la parábola coincide con el mínimo calculado. Antes del vértice, la parábola es decreciente, y después, creciente.

107. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $y = x^4 - 6x^2 + 5x$

Solución:

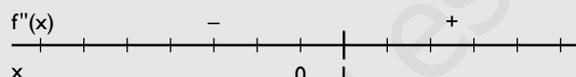
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$y''' = 6$$

$$y'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } A(1, 0)$$



Convexa (\cup): $(1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$

b) $y' = 4x^3 - 12x + 5$

$$y'' = 12x^2 - 12$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

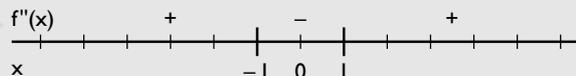
$$x = -1 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow A(-1, -10)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(1, 0)$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } A(-1, -10)$$

$$y'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } B(1, 0)$$



Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-1, 1)$

108. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}/2 \Rightarrow B(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$$

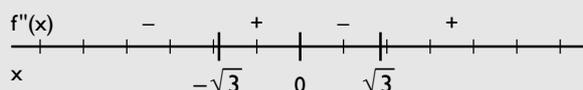
$$y''' = \frac{-12x^4 + 72x^2 - 12}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'''(-\sqrt{3}) = 3/8 \neq 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow Punto de inflexión: A $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$

$$y'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: O}(0, 0)$$

$$y'''(\sqrt{3}) = 3/8 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: B}(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$$



Convexa (\cup): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

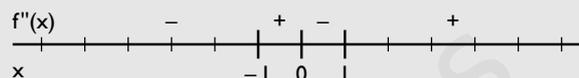
$$b) y' = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{O}(0, 0)$$

$$y''' = \frac{-12x^4 + 72x^2 - 12}{(x^2 - 1)^4}$$

$$y'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión: O}(0, 0)$$



Convexa (\cup): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Problemas

109. Aplicando la definición de derivada, calcula la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

en el punto de abscisa $x = -2$

Solución:

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-2+h+3} - \frac{1}{-2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1-h}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(1+h)h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

$$\text{Si } x = -2 \Rightarrow f(-2) = 1 \Rightarrow P(-2, 1)$$

$$m = f'(-2) = -1$$

$$y - 1 = -(x + 2)$$

$$y = -x - 1$$

110. Halla los puntos en los que la función derivada de las siguientes funciones es igual a cero:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

Solución:

a) $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow P(1, -7)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow P(-2, 20)$$

b) $y' = 3x^2 - 6x + 3$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow P(1, 3)$$

111. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto de abscisa $x = 3$

Solución:

$$x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$$

$$y' = 2x - 4$$

Recta tangente:

$$m = y'(3) = 2$$

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 4$$

Recta normal:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

112. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 5x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$

Solución:

$$x = -2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow P(-2, 6)$$

$$y' = 3x^2 - 5$$

Ejercicios y problemas

Recta tangente:

$$m = y'(-2) = 7$$

$$y - 6 = 7(x + 2)$$

$$y = 7x + 20$$

Recta normal:

$$y - 6 = -\frac{1}{7}(x + 2)$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7}$$

113. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P(1, 1)$$

$$y' = -1/x^2$$

Recta tangente:

$$m = y'(1) = -1$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 2$$

Recta normal:

$$y - 1 = (x - 1)$$

$$y = x$$

114. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ cuya pendiente sea 4

Solución:

$$y' = 4x^3$$

$$4x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(1, 2)$$

$$m = 4$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 2$$

115. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 9x + 1$ cuya pendiente sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:

$$y' = 3x^2 - 9$$

$$3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

$$a) x = 2 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow P(2, -9)$$

$$m = 3$$

$$y + 9 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 15$$

$$b) x = -2 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow P(-2, 11)$$

$$m = 3$$

$$y - 11 = 3(x + 2)$$

$$y = 3x + 17$$

Hay dos soluciones.

116. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = -x^3 + 26x$ que sean paralelas a la recta $y = -x$

Solución:

La recta tiene de pendiente:

$$y' = -1, m = -1$$

$$y' = -3x^2 + 26$$

$$-3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, x = -3$$

$$a) x = 3 \Rightarrow y = 51 \Rightarrow P(3, 51)$$

$$m = -1$$

$$y - 51 = -1(x - 3)$$

$$y = -x + 54$$

$$b) x = -3 \Rightarrow y = -51 \Rightarrow P(-3, -51)$$

$$m = -1$$

$$y + 51 = -1(x + 3)$$

$$y = -x - 54$$

117. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - x^2$ que tengan una pendiente de 45°

Solución:

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$y' = 3x^2 - 2x$$

$$3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1/3$$

$$a) x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(1, 0)$$

$$m = 1$$

$$y = x - 1$$

$$b) x = -1/3 \Rightarrow y = -4/27 \Rightarrow P(-1/3, -4/27)$$

$$m = 1$$

$$y + 4/27 = x + 1/3$$

$$y = x + 5/27$$

118. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 4$ en los puntos de corte con el eje X

Solución:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

$$y' = 2x$$

$$a) P(2, 0)$$

$$m = y'(2) = 4$$

$$y = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8$$

b) $P(-2, 0)$

$$m = y'(-2) = -4$$

$$y = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8$$

119. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \sin x$$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π , solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$$y' = \cos x$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$$

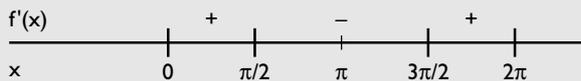
$$x = \pi/2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(\pi/2, 1)$$

$$x = 3\pi/2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(3\pi/2, -1)$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''(\pi/2) = -1 < 0 (-) \Rightarrow A(\pi/2, 1) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(3\pi/2) = 1 > 0 (+) \Rightarrow B(3\pi/2, -1) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

Decreciente (\searrow): $(\pi/2, 3\pi/2)$

120. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \cos x$$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π , solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$$y' = -\sin x$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$$

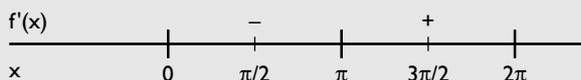
$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

$$x = \pi \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(\pi, -1)$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''(0) = -1 < 0 (-) \Rightarrow A(0, 1) \text{ máximo relativo.}$$

$$y''(\pi) = 1 > 0 (+) \Rightarrow B(\pi, -1) \text{ mínimo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(\pi, 2\pi)$

Decreciente (\searrow): $(0, \pi)$

121. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x - \sin x$$

Solución:

$$y' = 1 - \cos x$$

$$1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$y'' = \sin x$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''' = \cos x$$

$$y'''(0) = 1 \neq 0$$

$A(0, 0)$ es un punto de inflexión y lo mismo sucede con todos los $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $y' = 1 - \cos x$, se tiene que y' nunca puede ser negativa; por tanto, es siempre creciente.

Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (\searrow): \emptyset

122. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función $y = x + \cos x$

Solución:

$$y' = 1 - \sin x$$

$$1 - \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(\pi/2, 1)$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''(\pi/2) = 0$$

$$y''' = \sin x$$

$$y'''(\pi/2) = 1 \neq 0$$

$A(\pi/2, 1)$ es un punto de inflexión, y lo mismo sucede con todos los $x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $y' = 1 - \sin x$, se tiene que y' nunca puede ser negativa; por tanto, es siempre creciente.

Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

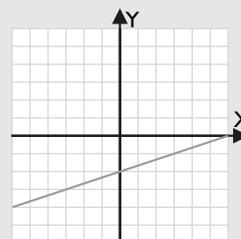
Decreciente (\searrow): \emptyset

123. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = \frac{x}{3} - 2$. Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$$y' = 1/3 > 0 \Rightarrow \text{La función es siempre creciente.}$$

La gráfica de la función es una recta de pendiente $m = 1/3$, que es la derivada.



Ejercicios y problemas

124. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -3x^2 + 6x + 2$. Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

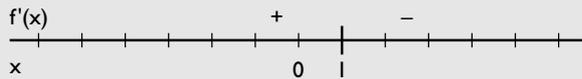
Solución:

$$y' = -6x + 6$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1$$

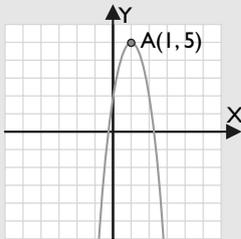
$$x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(1, 5)$$

$$y'' = -6 < 0 (-) \Rightarrow A(1, 5) \text{ máximo relativo.}$$



Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1)$

Decreciente (\searrow): $(1, +\infty)$



Tiene un máximo relativo, antes del eje es creciente, y después, decreciente.

125. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \sin x$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π , solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$-\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$$

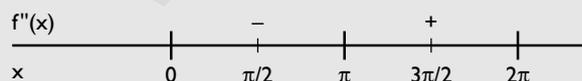
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$x = \pi \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(\pi, 0)$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y'''(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow A(0, 0) \text{ punto de inflexión.}$$

$$y'''(\pi) = 1 \neq 0 \Rightarrow B(\pi, 0) \text{ punto de inflexión.}$$



Convexa (\cup): $(\pi, 2\pi)$

Cóncava (\cap): $(0, \pi)$

126. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \cos x$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π , solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$-\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$$

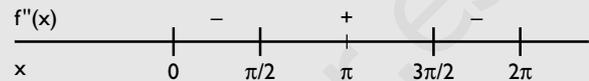
$$x = \pi/2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(\pi/2, 0)$$

$$x = 3\pi/2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3\pi/2, 0)$$

$$y''' = \sin x$$

$$y'''(\pi/2) = 1 \neq 0 \Rightarrow A(\pi/2, 0) \text{ punto de inflexión.}$$

$$y'''(3\pi/2) = -1 \neq 0 \Rightarrow B(3\pi/2, 0) \text{ punto de inflexión.}$$



Convexa (\cup): $(\pi/2, 3\pi/2)$

Cóncava (\cap): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

127. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x + \sin x$

Solución:

$$y' = 1 + \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

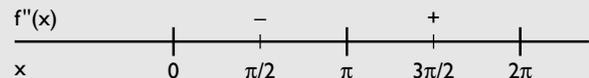
$$-\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y'''(0) = -1 \neq 0$$

$A(0, 0)$ es un punto de inflexión y lo mismo sucede con todos los $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Convexa (\cup): $(\pi, 2\pi)$

Cóncava (\cap): $(0, \pi)$

La convexidad es periódica de período 2π

128. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x - \cos x$

Solución:

$$y' = 1 + \sin x$$

$$y'' = \cos x$$

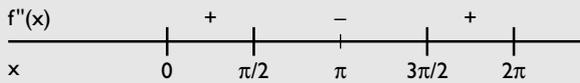
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 \Rightarrow y = \pi/2 \Rightarrow A(\pi/2, \pi/2)$$

$$y''' = -\sin x$$

$$y'''(\pi/2) = -1 \neq 0$$

$A(\pi/2, \pi/2)$ es un punto de inflexión, y lo mismo sucede con todos los $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Convexa (\cup): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

Cóncava (\cap): $(\pi/2, 3\pi/2)$

La convexidad es periódica de período 2π

Para profundizar

129. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva

$$y = x^2 + 6x + 4$$

en el punto de abscisa $x = -2$. Haz la representación gráfica.

Solución:

$$x = -2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow P(-2, -4)$$

$$y' = 2x + 6$$

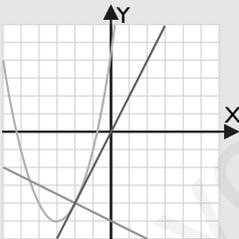
$$m = y'(-2) = 2$$

Recta tangente:

$$y + 4 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x$$

Recta normal:

$$y + 4 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 5$$



130. La ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es:

$$y - 4x + 11 = 0$$

Calcula cuánto valen $f(3)$ y $f'(3)$

Solución:

La recta tangente es:

$$y = 4x - 11$$

$$f(3) = 4 \cdot 3 - 11 = 1$$

$$f'(3) = 4$$

131. Halla los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas $y = x^2 + 3x - 2$, $y = 2x^2 + x - 3$ son paralelas.

Solución:

$$y' = 2x + 3$$

$$y' = 4x + 1$$

$$2x + 3 = 4x + 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2) \text{ en la 1ª parábola.}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0) \text{ en la 2ª parábola.}$$

132. Demuestra que la función $y = Lx$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

Solución:

$$y' = 1/x$$

$$\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$$

$y' > 0$ en todos los puntos del dominio; por lo tanto, es creciente siempre.

133. Determina los máximos, los mínimos relativos y la monotonía de la función $y = x^2 - 8Lx$

Solución:

$$y' = 2x - 8/x$$

$$2x - 8/x = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

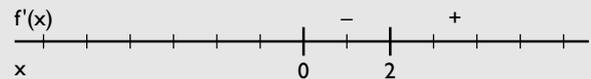
$x = -2$ no se estudia, por no estar en el dominio.

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8L \Rightarrow A(2, 4 - 8L)$$

$$y'' = 2 + 8/x^2$$

$$y''(2) = 4 > 0 (+) \Rightarrow A(2, 4 - 8L) \text{ mínimo relativo.}$$

Monotonía:



Creciente (\nearrow): $(2, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(0, 2)$

134. Calcula la amplitud del ángulo con el que la recta tangente a la gráfica de la función $y = \sin x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

$$y' = \cos x$$

$$m = \text{tg } \alpha = \cos 0^\circ = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Paso a paso

135. Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

136. Halla las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = x^2 - 6x + 11 \text{ para } x = 4$$

Representa la curva y las rectas.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

137. Calcula los máximos y mínimos relativos y la monotonía de:

$$y = x^3 - 3x$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

138. Determina los puntos de inflexión y la curvatura de la función: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

139. **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es, elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

140. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \frac{e^x}{\sin x} \quad \text{b) } y = \sqrt{3x^2 - 5}$$

Solución:

$$\text{a) } y' = e^x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right)$$

$$\text{b) } y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 5}}$$

141. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = e^{\text{tg } x} \quad \text{b) } y = e^x \text{ L } x$$

Solución:

$$\text{a) } y' = (\text{tg}^2 x + 1)e^{\text{tg } x}$$

$$\text{b) } y' = e^x \left(\text{L } x + \frac{1}{x} \right)$$

142. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = e^{x^2} \cos x \quad \text{b) } y = \text{L } \cos^3 x$$

Solución:

$$\text{a) } y' = e^{x^2} (2x \cos x - \sin x)$$

$$\text{b) } y' = -3 \text{tg } x$$

143. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$$y' = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow B(1, 1/4)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(2, 0)$$

$$y'' = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y''(0) = 2 > 0 (+) \Rightarrow A(0, 0)$$

mínimo relativo.

$$y''(1) = -1 < 0 (-) \Rightarrow B(1, 1/4)$$

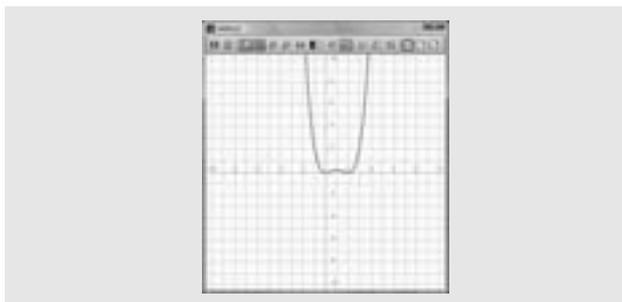
máximo relativo.

$$y''(2) = 2 > 0 (+) \Rightarrow C(2, 0)$$

mínimo relativo.

$$\text{Creciente } (\nearrow): (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{Decreciente } (\searrow): (-\infty, 0) \cup (1, 2)$$



144. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

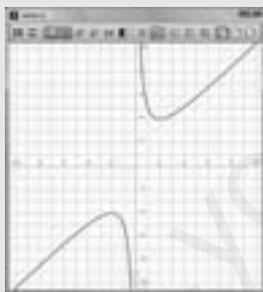
$$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

Máximo relativo: A(-2, 4)

Mínimo relativo: B(2, 4)

Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (\searrow): $(-2, 0) \cup (0, 2)$



145. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = 6x - 12$$

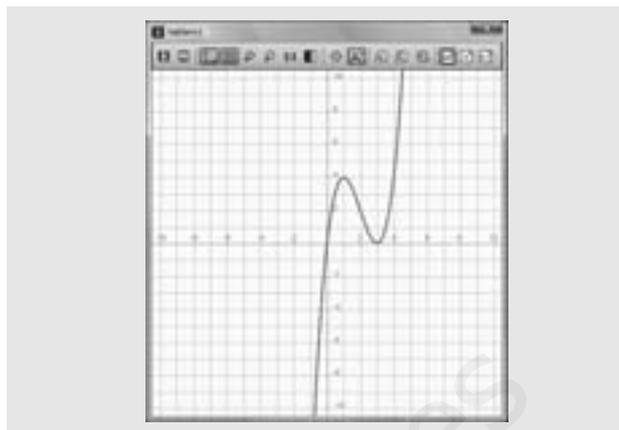
$$y'' = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

$$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow A(2, 2) \text{ punto de inflexión.}$$

Convexa (\cup): $(2, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, 2)$



146. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow A(1, 3/2)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow B(-1, 3/2)$$

$$y''' = \frac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$$

$$y'''(1) = 9/8 \neq 0 \Rightarrow A(1, 3/2)$$

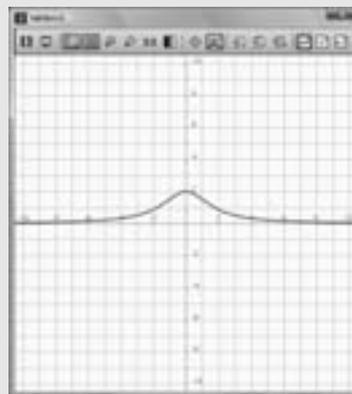
punto de inflexión.

$$y'''(-1) = -9/8 \neq 0 \Rightarrow B(-1, 3/2)$$

punto de inflexión.

Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-1, 1)$



147. Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

b) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

Representa la gráfica para comprobarlo.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 12$

$y' = 0 \Rightarrow x = 2$

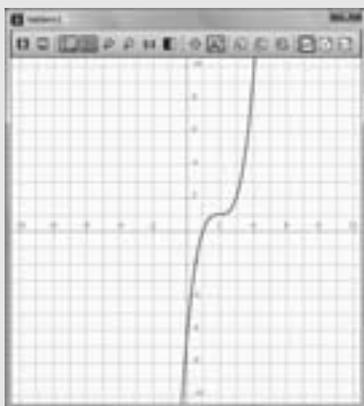
$x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$

$y'' = 6x - 12$

$y''(2) = 0$

$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow A(2, 1)$

punto de inflexión.



b) $y' = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1, 3)$

$y'' = -12x^2 + 24x - 12$

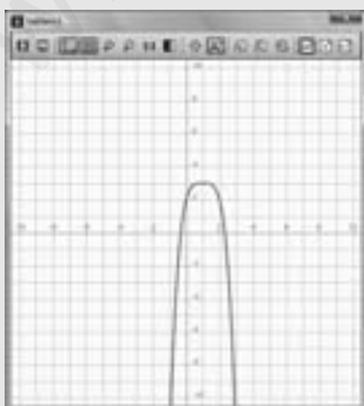
$y''(1) = 0$

$y''' = -24x + 24$

$y'''(1) = 0$

$y^{IV} = -24 < 0 (-) \Rightarrow A(1, 3)$

máximo relativo.



Con ayuda de Wiris o Derive, resuelve los siguientes problemas:

148. Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la siguiente función en el punto que se indica:

$y = x^4 - 2x^3$ en $x = 1$

Representa la función, la recta tangente y la recta normal para comprobarlo.

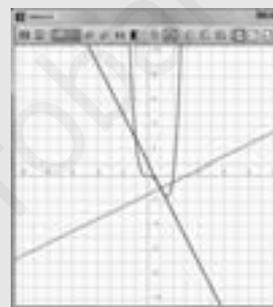
Solución:

Recta tangente:

$y = -2x + 1$

Recta normal:

$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



149. Calcula los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y determina la monotonía y la curvatura de la siguiente función:

$y = \frac{3x}{x^2 - 1}$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

Máximos relativos: no tiene.

Mínimos relativos: no tiene.

Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

Creciente (\nearrow): \emptyset

Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Convexa (\cup): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

