**Halla el lugar geométrico de los puntos *P*(*x*, *y*) tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde *P* a los puntos: *A* (–2, 1) y *B* (2, –1) sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Represéntala.**

Si P es el punto de coordenadas (x,y) de los datos del enunciado obtenemos:

La pendiente de la recta que une *P* con *A* es: $\frac{y-1}{x+2}$

La pendiente de la recta que une *P* con *B* es: $\frac{y+1}{x-2}$

El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir: $\frac{y-1}{x+2}\cdot\frac{y+1}{x-2}=1$

Efectuando las operaciones en la ecuación que hemos planteado,

$$\frac{y^2-1}{x^2-4}=1 \;\rightarrow\; y^2-1=x^2-4 \;\rightarrow\; x^2-y^2-4+1=0 \;\rightarrow\; x^2-y^2=3 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$$

Es una hipérbola de eje horizontal, en la que $a = b = \sqrt{3}$

Calculemos el valor de c, en una hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=3+3=6 \;\rightarrow\; c=\sqrt{6}$$

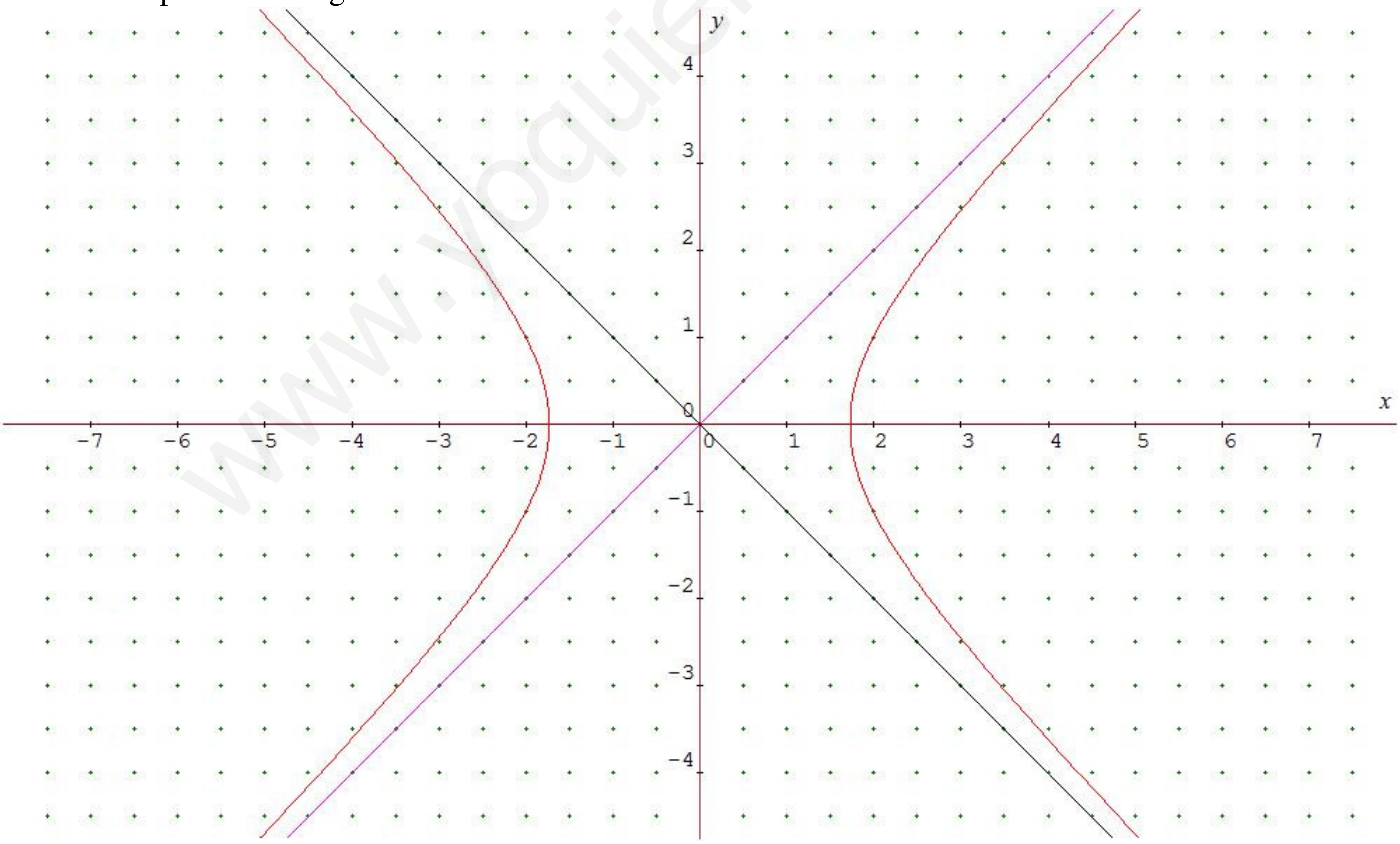
Los focos son los puntos $F'(-\sqrt{6},0)$ y $F(\sqrt{6},0)$.

La pendiente de las asíntotas será $m=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\pm1$

Por lo tanto las asíntotas son las rectas y = x e y = - x

La excentricidad es: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\approx 1'41$

La representación gráfica es:



**Una circunferencia del plano pasa por los puntos (1, 3) y (3, 5) y tiene el centro sobre la recta $x + 2y = 3$. Halla su centro y su radio.**

Si el centro de la circunferencia C(x,y) está sobre la recta $x + 2y = 3 \rightarrow x = 3 - 2y$; entonces es de la forma $C(3 - 2y, y)$.

• La distancia del centro a los dos puntos dados, $A(1, 3)$ y $B(3, 5)$ es la misma. Además, esta distancia es el radio, $r$, de la circunferencia:

$r = dist\,(C, A) = dist\,(C, B)$

$$d(C,A) = \sqrt{(3-2y-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(2-2y)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{4-8y+4y^2+y^2-6y+9} = \sqrt{5y^2-14y+13}$$

$$d(C,B) = \sqrt{(3-2y-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(-2y)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{4y^2+y^2-10y+25} = \sqrt{5y^2-10y+25}$$

Como las dos distancias deben ser iguales,

$$\sqrt{5y^2-14y+13} = \sqrt{5y^2-10y+25}$$

$$5y^2-14y+13 = 5y^2-10y+25$$

$$-14y+10y = 25-13$$

$$-4y = 12$$

$$y = -3 \quad \rightarrow \quad x = 3-2(-3) = 3+6 = 9$$

El *centro* de la circunferencia es $C(9, -3)$.

El *radio* es,

$$r = \sqrt{5y^2-14y+13} = \sqrt{5(-3)^2-14(-3)+13} = \sqrt{45+42+13} = \sqrt{100} = 10$$

**Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (–4, 0).**

Como los focos de la elipse están sobre el eje OX y el punto (0,0), que es el punto medio de los dos focos, es el centro de la elipse, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como la elipse pasa por (3, 1)

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

Tenemos una ecuación pero dos incógnitas, a y b, necesitamos otra ecuación.

En una elipse se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \rightarrow a^2 = b^2 + 16$

Por lo tanto el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{9b^2 + a^2}{a^2b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9b^2 + a^2 = a^2b^2 \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de $a^2$ en la primera ecuación: $9b^2 + b^2 + 16 = (b^2 + 16)\,b^2$

$10b^2 + 16 = b^4 + 16b^2$

$b^4 + 6b^2 - 16 = 0$ que es una ecuación bicuadrada

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-16)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-6-10}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \text{ No válida} \end{cases}$$

Como $a^2 = b^2 + 16 \rightarrow a^2 = 2 + 16 \rightarrow a^2 = 18$

La ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

**Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos *F* (–3, 0) y *F′* (3, 0) y que pasa por el punto *P*(8, 5 $\sqrt{3}$ ).**

Este ejercicio podríamos resolverlo siguiendo un proceso similar al utilizado en el ejercicio 34, lo haremos de otra forma.
Como los focos de la hipérbola están sobre el eje OX y el punto (0,0) es el punto medio de los dos focos, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist\ (P, F) - dist\ (P, F')| = 2a$

$$d(P,F)=\sqrt{(8+3)^2+(5\sqrt{3})^2}=\sqrt{121+25\,.\,3}=\sqrt{196}=14$$

$$d(P,F')=\sqrt{(8-3)^2+(5\sqrt{3})^2}=\sqrt{25+25\,.\,3}=\sqrt{100}=10$$

$$Por\ lo\ que\quad |14-10|=2a\ \rightarrow\ 4=2a\ \rightarrow\ a=2$$

De las coordenadas de los focos sabemos que c = 3.
En una hipérbola se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, por lo tanto $3^2 = 2^2 + b^2$
$9 = 4 + b^2$, $\rightarrow b^2 = 5$
La ecuación es:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

**La parábola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.**

Arreglamos la ecuación de la parábola para ponerla en su forma reducida,

$$y^2 - 4y = 6\,x + 5 \ \rightarrow\ y^2 - 4y + 4 = 6\,x + 5 + 4 \ \rightarrow\ (y-2)^2 = 6\,x + 9$$

$$(y-2)^2=6\left(x+\frac{9}{6}\right)\ \rightarrow\ (y-2)^2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\ \longrightarrow\ \text{El vértice de la parábola es } V\ \left(\frac{-3}{2},2\right)$$

El foco y el vértice de la parábola tienen la misma ordenada, luego la directriz será una recta vertical, x = a, de forma que

$$\frac{x_F+a}{2}=x_v\ \rightarrow\ \frac{0+a}{2}=\frac{-3}{2}\ \rightarrow\ \frac{a}{2}=\frac{-3}{2}\ \rightarrow\ a=-3$$

La directriz es $x = -3$.

**Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

**a) $4x^2 + 9y^2 = 36$** **b) $16x^2 - 9y^2 = 144$** **c) $9x^2 + 9y^2 = 25$**
**d) $x^2 - 4y^2 = 16$** **e) $y^2 = 14x$** **f ) $25x^2 + 144y^2 = 900$**

**a) $4x^2 + 9y^2 = 36$**

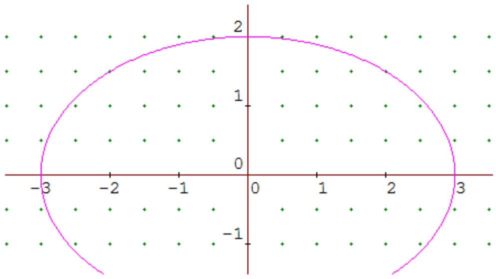
Dividimos ambos miembros de la igualdad por 36,

$$\frac{4x^2+9y^2}{36}=\frac{36}{36}\ \rightarrow\ \frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=1\ \rightarrow\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Es la ecuación reducida de una elipse de eje mayor horizontal.
$a^2 = 9 \ \rightarrow\ a = 3$ ; $b^2 = 4 \ \rightarrow\ b = 2$
En una elipse se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, en este caso: $9 = 4 + c^2 \ \rightarrow\ c^2 = 5 \ \rightarrow\ c = \sqrt{5}$
Los elementos de esta elipse son:

Centro ( 0 , 0 )
Focos $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$
Semieje mayor a = 3
Semieje menor b = 2

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}=0'745$$



**b) $16x^2 - 9y^2 = 144$**

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 144,

$$\frac{16x^2 - 9y^2}{144} = \frac{144}{144} \rightarrow \frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Es la ecuación reducida de una hipérbola de eje horizontal.

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$ ; $b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

En una hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso: $c^2 = 9 + 16 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

Los elementos de esta hipérbola son:

Centro ( 0 , 0 )

Focos (-5, 0 ) y (5, 0 )

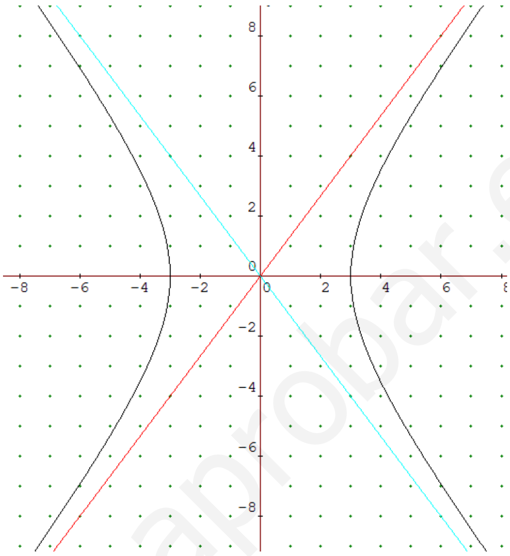
Semieje mayor a = 3

Pendiente de las asíntotas $\pm\frac{4}{3}$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \frac{4}{3}x \quad e \quad y = \frac{-4}{3}x$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} = 1'667$

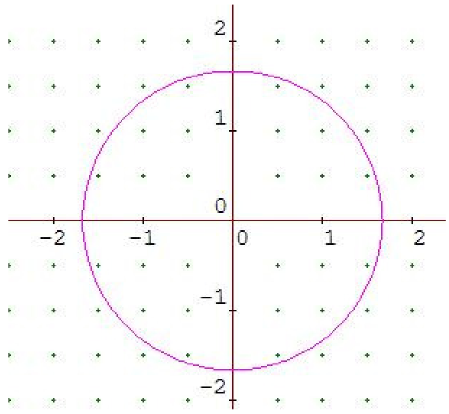


**c) $9x^2 + 9y^2 = 25$**

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 9,

$$\frac{9x^2+9y^2}{9}=\frac{25}{9} \quad \rightarrow \quad \frac{9x^2}{9}+\frac{9y^2}{9}=\frac{25}{9} \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=\frac{25}{9}$$

Es la ecuación de una circunferencia de centro ( 0 , 0 ) y radio $\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$



**d) $x^2 - 4y^2 = 16$**

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 16,

$$\frac{x^2-4y^2}{16}=\frac{16}{16} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16}-\frac{4y^2}{16}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$$

Es la ecuación reducida de una hipérbola de eje horizontal.

$a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad a = 4$ ; $b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad b = 2$

En una hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso: $c^2 = 16 + 4 \rightarrow c^2 = 20 \rightarrow c = \sqrt{20}$

Los elementos de esta hipérbola son:

Centro ( 0 , 0 )

Focos $(-\sqrt{20}, 0)$ y $(\sqrt{20}, 0)$

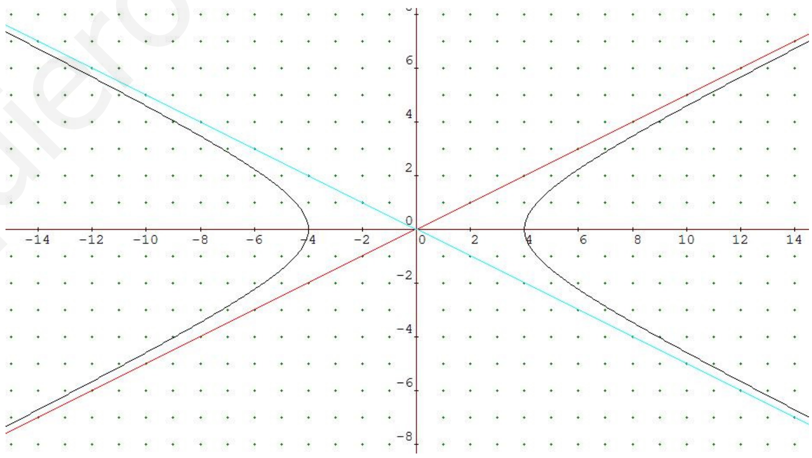
Semieje mayor a = 4

Pendiente de las asíntotas $\pm\frac{2}{4}=\pm\frac{1}{2}$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y=\frac{1}{2}x \qquad e \qquad y=\frac{-1}{2}x$$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{20}}{4}=1'118$

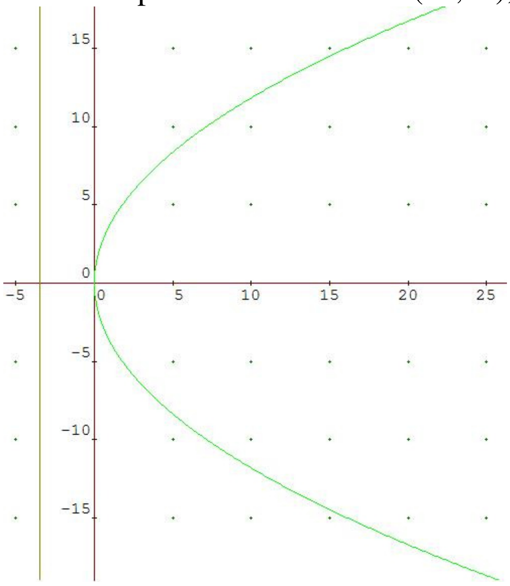


**e) $y^2 = 14x$**

Es la ecuación de una parábola,

$$2p = 14 \quad \rightarrow \quad p = 7 \quad \rightarrow \quad \frac{p}{2} = \frac{7}{2} = 3{\prime}5$$

Los elementos de esta parábola son: vértice ( 0 , 0 ), foco ( 3´5 , 0 ) y directriz  x = - 3´5




**f) $25x^2 + 144y^2 = 900$**

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 900,

$$\frac{25x^2 + 144y^2}{900} = \frac{900}{900} \quad \rightarrow \quad \frac{25x^2}{900} + \frac{144y^2}{900} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{4y^2}{25} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

Es la ecuación reducida de una elipse de eje mayor horizontal.

$a^2 = 36 \quad \rightarrow \quad a = 6$ ;  $b^2 = 25/4 \quad \rightarrow \quad b = 5/2$

En una elipse se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, en este caso:

$$36 = \frac{25}{4} + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 36 - \frac{25}{4} = \frac{144 - 25}{4} = \frac{119}{4} \quad \rightarrow \quad c = \frac{\sqrt{119}}{2} = 5{\prime}45$$

Los elementos de esta elipse son:

Centro ( 0 , 0 )

$$Focos: \left( -\frac{\sqrt{119}}{2}, 0 \right) \; y \; \left( \frac{\sqrt{119}}{2}, 0 \right)$$

Semieje mayor a = 6

Semieje menor b = 5/2

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0{\prime}909$$