

Matemáticas I - Complejos

1. Calcula $\left(\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12}$. Expresa el resultado en forma binómica, pero mejor realiza todas las operaciones en forma polar.

2. Halla todas las soluciones de la ecuación $z^6 + 8 = 0$, represéntalas gráficamente y exprésalas en forma binómica.

3. Determina los valores de m y n para los que se cumple la igualdad: $\frac{m+2i}{3+ni} = (\sqrt{2})_{315^\circ}$

4. a) Utiliza la fórmula de **De Moivre** para hallar expresiones para $\sin(4t)$ y $\cos(4t)$.

b) A partir de ellas, obtén una fórmula para $\operatorname{tg}(4t)$ en función de $\operatorname{tg}(t)$

Respuestas

1. Calcula $\left(\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12}$. Expresa el resultado en forma binómica, pero mejor realiza todas las operaciones en forma polar.

$|2-2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\arg(2-2i) = \arctg(-1) = 135^\circ$ o 315° . Es 315° porque la parte imaginaria es negativa y la real positiva.

$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg(1-\sqrt{3}i) = \arctg(-\sqrt{3}) = 120^\circ$ o 300° . Se trata de 300° por la misma razón de antes. Entonces,

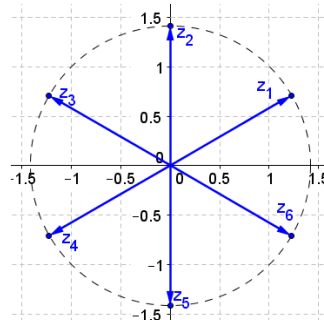
$$\left(\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12} = \left(\frac{(2\sqrt{2})_{315^\circ}}{2_{300^\circ}}\right)^{12} = \left((\sqrt{2})_{15^\circ}\right)^{12} = (2^6)_{180^\circ} = -64$$

2. Halla todas las soluciones de la ecuación $z^6 + 8 = 0$, represéntalas gráficamente y exprésalas en forma binómica.

Será:

$$z = \sqrt[6]{-8} = \sqrt[6]{8_{180^\circ}} = (\sqrt[6]{8})_{\frac{180^\circ}{6} + k \frac{360^\circ}{6}} = \sqrt{2}_{30^\circ + k \cdot 60^\circ} =$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}_{30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \sqrt{2}_{90^\circ} = \sqrt{2}i \\ \sqrt{2}_{150^\circ} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \sqrt{2}_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \sqrt{2}_{270^\circ} = -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}_{330^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$



3. Determina los valores de m y n para los que se cumple la igualdad: $\frac{m+2i}{3+ni} = (\sqrt{2})_{315^\circ}$

$$(\sqrt{2})_{315^\circ} = \sqrt{2}(\cos(315^\circ) + i \cdot \sen(315^\circ)) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 - i$$

$$\frac{m+2i}{3+ni} = 1 - i \Rightarrow (m+2i) = (3+ni)(1-i) = (3+n) + (n-3)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 + n \\ 2 = n - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ m = 8 \end{cases}$$

4. a) Utiliza la fórmula de **De Moivre** para hallar expresiones para $\cos(4t)$ y $\cos(4t)$.

$$\begin{aligned} \cos(4t) + i \cdot \operatorname{sen}(4t) &= (\cos(t) + i \cdot \operatorname{sen}(t))^4 \\ &= \binom{4}{0} (\cos(t))^4 (i \cdot \operatorname{sen}(t))^0 + \binom{4}{1} (\cos(t))^3 (i \cdot \operatorname{sen}(t))^1 \\ &\quad + \binom{4}{2} (\cos(t))^2 (i \cdot \operatorname{sen}(t))^2 + \binom{4}{3} (\cos(t))^1 (i \cdot \operatorname{sen}(t))^3 \\ &\quad + \binom{4}{4} (\cos(t))^0 (i \cdot \operatorname{sen}(t))^4 = \\ &\mathbf{\cos^4(t) + 4\cos^3(t)\operatorname{sen}(t)i - 6\cos^2(t)\operatorname{sen}^2(t) - 4\cos(t)\operatorname{sen}^3(t)i + \operatorname{sen}^4(t)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{\cos(4t) = \cos^4(t) - 6\cos^2(t)\operatorname{sen}^2(t) + \operatorname{sen}^4(t)} \\ \mathbf{\operatorname{sen}(4t) = 4\cos^3(t)\operatorname{sen}(t) - 4\cos(t)\operatorname{sen}^3(t)} \end{cases} \end{aligned}$$

b) A partir de ellas, obtén una fórmula para $\operatorname{tg}(4t)$ en función de $\operatorname{tg}(t)$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(4t) &= \frac{\operatorname{sen}(4t)}{\cos(4t)} = \frac{4\cos^3(t)\operatorname{sen}(t) - 4\cos(t)\operatorname{sen}^3(t)}{\cos^4(t) - 6\cos^2(t)\operatorname{sen}^2(t) + \operatorname{sen}^4(t)} \\ &\text{Dividiendo numerador y denominador por } \cos^4(t), \\ \operatorname{tg}(4t) &= \frac{4\operatorname{tg}(t) - 4\operatorname{tg}^3(t)}{1 - 6\operatorname{tg}^2(t) + \operatorname{tg}^4(t)} \end{aligned}$$