

**Números Complejos**  
**PREGUNTAS MÁS FRECUENTES**

**1. ¿Qué es la unidad imaginaria  $i$ ?**

Es un elemento del que conocemos únicamente su cuadrado:  $i^2 = -1$ . Obviamente, no se trata de un número real.

**2. ¿Qué es un número complejo?**

Es un número que dispone de dos características distintas -de ahí el nombre de complejo. Tiene algo de real y algo de imaginario. Se suele utilizar la letra  $z$  en su definición que en su forma cartesiana es  $z = x + yi$  siendo  $x, y$  dos números reales. A todos los números reales se les considera como números complejos con  $y = 0$ .

**3. ¿Cuáles son las definiciones más importantes en los números complejos escritos en forma cartesiana?**

La *Parte Real* es el número real que no multiplica a la unidad imaginaria  $i$ . Se utiliza la expresión *Re*. Para el número complejo  $z = x + yi$  será:  $\text{Re}(z) = x$

La *Parte Imaginaria* es el número real que multiplica a la unidad imaginaria  $i$ . Se utiliza la expresión *Im*. Para el número complejo  $z = x + yi$  será:  $\text{Im}(z) = y$

Ejemplos:Siendo  $z = 3 + 2i \rightarrow \text{Re}(z) = 3, \text{Im}(z) = 2$ Siendo  $z = 3 - i \rightarrow \text{Re}(z) = 3, \text{Im}(z) = -1$ Siendo  $z = 7i \rightarrow \text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = 7$ Siendo  $z = 3 \rightarrow \text{Re}(z) = 3, \text{Im}(z) = 0$ **4. ¿Cómo se representa gráficamente un número complejo escrito en forma cartesiana?**

Se utiliza un plano cartesiano de manera que cada punto del plano equivale a un número complejo y viceversa. Los números reales están situados sobre el eje X y los imaginarios puros sobre el eje Y. En consecuencia al eje X se le llama eje real y al eje Y, eje imaginario. De esta manera al número complejo  $z = 3 + 2i$  le corresponde el punto  $P(3, 2)$ .

**5. ¿Qué se entiende por conjugado de un número complejo?**

Dado un número complejo cualquiera, se denomina su conjugado a aquel que tiene su misma parte real y opuesta parte cartesiana. Por ejemplo  $3 + 2i$  y  $3 - 2i$  son conjugados. En el plano cartesiano estarían situados simétricamente respecto del eje real. Pasa de uno a otro se denomina *conjugar*, operación que algunos textos representan con un segmento horizontal sobre el número complejo: Por ejemplo:  $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$  y otros con un asterisco: Por ejemplo:  $(3 - 2i)^* = 3 - 2i$

**6. ¿Cómo se suman números complejos escritos en forma cartesiana?**

Se suma partes reales con partes reales y partes imaginarias con partes imaginarias. La definición es:

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Ejemplo:

$$(3 + 2i) + (5 - 7i) = (3 + 5) + (2 - 7)i = 8 - 2i$$

**7. ¿Cómo se multiplica un número real por un número complejo escrito en forma cartesiana?**

Se multiplica el número real por la parte real y por la parte imaginaria del nº complejo. La definición es:

$$k \cdot (x + yi) = kx + kyi$$

Ejemplo:

$$4 \cdot (5 - 7i) = 20 - 28i$$

**8. ¿Cómo se multiplican dos números complejos escritos en forma cartesiana?**

Se utiliza la siguiente definición:  $(x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$

En la práctica se multiplican distribuyendo el producto cual si fuesen polinomios pero aplicando que  $i^2 = -1$

Ejemplo:

$$(3 + 2i) \cdot (5 - 7i) = 15 - 21i + 10i - 14i^2 = 15 - 21i + 10i + 14 = 29 - 11i$$

**9. ¿Cómo se divide un número complejo escrito en forma cartesiana entre un número real?**

Se dividen tanto la parte real como la parte imaginaria entre el número real.

Ejemplo:

$$\frac{5 - 7i}{4} = \frac{5}{4} - \frac{7}{4}i$$

**10. ¿Cómo se dividen dos números complejos escritos en forma cartesiana?**

Se multiplican tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador. Así quedaría un número real en el denominador aplicándose el apartado anterior.

Ejemplo:

$$\frac{5 - 7i}{1 + 2i} = \frac{(5 - 7i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{5 - 10i - 7i + 14i^2}{1 - 2i + 2i - 4i^2} = \frac{5 - 10i - 7i - 14}{1 + 4} = \frac{-9 - 14i}{5} = -\frac{9}{5} - \frac{14}{5}i$$

**11. ¿Cómo se eleva la unidad imaginaria  $i$  a un exponente entero?**

Empecemos con exponentes enteros positivos. El resultado de cualquier potencia  $i^n$  será uno de estos cuatro resultados: 1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ . Para distinguirlos se divide el exponente  $n$  entre cuatro y se mira el resto. Si el resto es cero (es decir, que el exponente es múltiplo de cuatro) la potencia resulta 1. Si el resto es uno la potencia resulta  $i$ . Si el resto es dos la potencia resulta  $-1$  y si el resto es tres la potencia resulta  $-i$ . En la práctica consiste en sustituir el exponente por el resto de su división entre cuatro. Y como mucho sólo quedaría realizar dicha potencia.

Si el exponente es entero negativo, se divide 1 entre la potencia con exponente positivo. De nuevo sólo resulta uno de los cuatro resultados: 1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ .

Ejemplos:

$$i^{48} = i^0 = 1 \quad i^{177} = i^1 = i \quad i^{54} = i^2 = -1 \quad i^{23} = i^3 = -i \quad i^{-34} = \frac{1}{i^{34}} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

**12. ¿Cómo se eleva un número complejo escrito en forma cartesiana a un exponente entero?**

Empecemos con exponentes enteros positivos. Se aplica el binomio de Newton sustituyendo las potencias de la unidad imaginaria  $i$  según se explicó antes.

Si el exponente es entero negativo, se divide 1 entre la potencia con exponente positivo.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} (-2 + 3i)^4 &= \binom{4}{0}(-2)^4 + \binom{4}{1}(-2)^3 \cdot (3i)^1 + \binom{4}{2}(-2)^2 \cdot (3i)^2 + \binom{4}{3}(-2)^1 \cdot (3i)^3 + \binom{4}{4}(3i)^4 = \\ &= 1 \cdot 16 - 4 \cdot 8 \cdot 3i + 6 \cdot 4 \cdot 9i^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27i^3 + 1 \cdot 81i^4 = 16 - 96i + 216 \cdot (-1) + 216 \cdot (-i) + 81 \cdot 1 = \\ &= 16 - 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 312i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - i)^{-3} &= \frac{1}{(2 - i)^3} = 1 / \left[ \binom{3}{0}2^3 - \binom{3}{1}2^2 \cdot i + \binom{3}{2}2 \cdot i^2 + \binom{3}{3}i^3 \right] = 1 / [1 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - 1 \cdot i^3] = 1 / [8 - 12i - 6 + i] = \\ &= \frac{1}{2 - 11i} = \frac{1 \cdot (2 + 11i)}{(2 - 11i) \cdot (2 + 11i)} = \frac{2 + 11i}{4 + 22i - 22i - 121i^2} = \frac{2 + 11i}{4 + 121} = \frac{2 + 11i}{125} = \frac{2}{125} + \frac{11}{125}i \end{aligned}$$

**13. ¿Cómo se hace la raíz de un número complejo escrito en forma cartesiana?**

En forma cartesiana sólo se puede hacer la raíz cuadrada. Se iguala a un número complejo genérico, se eleva al cuadrado, se identifica la parte real con la parte real y la parte imaginaria con la parte imaginaria para acabar resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos lleva a una ecuación bicuadrada. Se obtienen dos raíces cuadradas opuestas. Se explicará más adelante un método más eficaz.

**Ejemplo:**

$$\sqrt{3-4i} = x + yi$$

$$3-4i = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \rightarrow y = \frac{-2}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 & \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \mp 1 \\ -1 & \rightarrow \text{Sin solución} \end{cases}$$

$$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$$

$$(2-i)^{-3} = \frac{1}{(2-i)^3} = 1 / \left[ \binom{3}{0} 2^3 - \binom{3}{1} 2^2 \cdot i^1 + \binom{3}{2} 2 \cdot i^2 + \binom{3}{3} i^3 \right] = 1 / [1 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - 1 \cdot i^3] = 1 / [8 - 12i - 6 + i] =$$

$$= \frac{1}{2-11i} = \frac{1 \cdot (2+11i)}{(2-11i) \cdot (2+11i)} = \frac{2+11i}{4+22i-22i-121i^2} = \frac{2+11i}{4+121} = \frac{2+11i}{125} = \frac{2}{125} + \frac{11}{125}i$$

**14. ¿Qué es la forma polar de un número complejo?**

Es una escritura alternativa a la forma cartesiana. Está diseñada para realizar rápidamente las operaciones que nos llevarían más trabajo realizadas en forma cartesiana: Radicación, Potenciación, División y Multiplicación.

En lugar de conocer su parte real y su imaginaria, conoceremos su distancia (positiva) al origen (*módulo*) y el ángulo (*argumento*) que forman la parte positiva del eje Real y el segmento que une el número complejo al origen. Como distintos valores de este ángulo (por ejemplo 30° y 390°) podrían representar la misma posición del número complejo, se denomina argumento principal cuando es positivo menor de 360°.

El módulo de un número complejo se suele representar con dos rayas verticales (como las del valor absoluto) y siempre es positivo. El argumento se representa con *Arg*. Se escribe primero el valor del módulo y como subíndice el argumento. Por ejemplo:  $z = 5_{30^\circ}$  significa un número complejo de módulo 5 y argumento 30°.

**15. ¿Cómo se pasa un número complejo de la forma polar a la forma cartesiana?**

Para el número complejo  $z = m_\alpha$  se utilizan la siguiente fórmula:  $z = m \cdot (\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$

**Ejemplo:**

$$z = 3_{167^\circ} = 3 \cdot (\cos 167^\circ + i \cdot \text{sen } 167^\circ) = -2,92 + 0,67i$$

**16. ¿Cómo se pasa un número complejo de la forma cartesiana a la forma polar?**

El módulo del número complejo  $z = x + yi$  se halla con:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (Pitágoras, en definitiva)

El argumento depende de la posición en que esté situado el número complejo:

$$\text{Para } z = x + yi: \begin{cases} x > 0, y = 0 \rightarrow \text{Arg}(z) = 0^\circ \\ \text{1er Cuadrante} \rightarrow \text{Arg}(z) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ x = 0, y > 0 \rightarrow \text{Arg}(z) = 90^\circ \\ \text{2º ó 3º Cuadrante} \rightarrow \text{Arg}(z) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ \\ x = 0, y < 0 \rightarrow \text{Arg}(z) = 270^\circ \\ \text{4º Cuadrante} \rightarrow \text{Arg}(z) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 360^\circ \end{cases}$$

El número complejo 0 tiene cero de módulo pero su argumento queda indefinido.

Ejemplos:

$$z = 3 \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2} = 3 \\ \text{Arg}(z) = 0^\circ \end{cases} \rightarrow z = 3_{0^\circ}$$

$$z = 3 + 4i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \text{Arg}(z) = \arctg(4/3) = 53,13^\circ \end{cases} \rightarrow z = 5_{53,13^\circ}$$

$$z = 4i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{4^2} = 4 \\ \text{Arg}(z) = 90^\circ \end{cases} \rightarrow z = 4_{90^\circ}$$

$$z = -5 + 12i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \\ \text{Arg}(z) = \arctg(12/-5) + 180^\circ = 112,62^\circ \end{cases} \rightarrow z = 13_{112,62^\circ}$$

$$z = -2 \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2} = 2 \\ \text{Arg}(z) = 180^\circ \end{cases} \rightarrow z = 2_{180^\circ}$$

$$z = -8 - 6i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10 \\ \text{Arg}(z) = \arctg(-8/-6) + 180^\circ = 237,99^\circ \end{cases} \rightarrow z = 10_{237,99^\circ}$$

$$z = -i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2} = 1 \\ \text{Arg}(z) = 270^\circ \end{cases} \rightarrow z = 1_{270^\circ}$$

$$z = 24 - 10i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{24^2 + (-10)^2} = 26 \\ \text{Arg}(z) = \arctg(-10/24) + 360^\circ = 337,38^\circ \end{cases} \rightarrow z = 26_{337,38^\circ}$$

**17. ¿Cómo se suman o restan dos números complejos escritos en forma polar?**

No hay ninguna fórmula rápida que permita deducir el módulo y el argumento del resultado de la suma o resta. Estas operaciones deben realizarse en forma cartesiana. Si se proponen en forma polar deben pasarse primero a forma cartesiana, sumarse, y convertir el resultado a la forma polar.

**18. ¿Cómo se multiplican dos números complejos escritos en forma polar?**

Se multiplican los módulos y se suman los argumentos:  $m_\alpha \cdot p_\beta = (m \cdot p)_{\alpha+\beta}$ . Si el argumento pasase de  $360^\circ$  se reduce al argumento principal.

Ejemplo:

$$3_{167^\circ} \cdot 2_{216^\circ} = (3 \cdot 2)_{167+216^\circ} = 6_{383^\circ} = 6_{23^\circ}$$

**19. ¿Cómo se dividen dos números complejos escritos en forma polar?**

Se dividen los módulos y se restan los argumentos:  $\frac{m_\alpha}{p_\beta} = \left(\frac{m}{p}\right)_{\alpha-\beta}$ . Si el argumento resultase negativo se reduce al argumento principal.

Ejemplo:

$$\frac{3_{156^\circ}}{2_{231^\circ}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{156^\circ-231^\circ} = 1,5_{-75^\circ} = 1,5_{285^\circ}$$

**20. ¿Cómo se eleva un número complejo escrito en forma polar a un exponente entero?**

Se eleva el módulo al exponente y multiplica el argumento por el exponente. Es la conocida como *fórmula de Moivre*:  $(m_\alpha)^n = (m^n)_{n\alpha}$ . La fórmula sirve tanto para exponentes enteros positivos como negativos. Si el argumento pasase de  $360^\circ$  ó resultase negativo se reduce al argumento principal.

Ejemplos:

$$(2_{156^\circ})^3 = (2^3)_{3 \cdot 156^\circ} = 8_{468^\circ} = 8_{108^\circ}$$

$$(2_{156^\circ})^{-4} = (2^{-4})_{-4 \cdot 156^\circ} = \left(\frac{1}{16}\right)_{-624^\circ} = \left(\frac{1}{16}\right)_{96^\circ}$$

**21. ¿Cómo se halla la raíz enésima de un número complejo escrito en forma polar?**

Lo primero que debemos saber es que tendremos tantas soluciones como el índice de la raíz. Se radica el módulo y se divide el argumento sumado a vueltas completas entre el índice:  $\sqrt[n]{m_\alpha} = (\sqrt[n]{m})_{\frac{\alpha+360k}{n}}$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Si tenemos que hallar la raíz de un número complejo escrito en forma polar, primero lo pasaríamos a forma polar, aplicaríamos lo explicado para hallar sus raíces y por último podríamos pasarlo a forma cartesiana.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8}_{213^\circ} = (\sqrt[3]{8})_{\frac{213+360k}{3}} = 2_{71^\circ+120k} = \begin{cases} 2_{71^\circ} \\ 2_{191^\circ} \\ 2_{311^\circ} \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{81}_{232^\circ} = (\sqrt[4]{81})_{\frac{232+360k}{4}} = 3_{58^\circ+90k} = \begin{cases} 3_{58^\circ} \\ 3_{148^\circ} \\ 3_{238^\circ} \\ 3_{328^\circ} \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1}_{270^\circ} = \sqrt[6]{1}_{\frac{270^\circ+360k}{6}} = 1_{45^\circ+60k} = \begin{cases} 1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{105^\circ} = -0,2588 + 0,9659i \\ 1_{165^\circ} = -0,9659 + 0,2588i \\ 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{285^\circ} = 0,2588 - 0,9659i \\ 1_{345^\circ} = 0,9659 - 0,2588i \end{cases}$$

**22. ¿Cómo es la forma de Euler de un número complejo?**

En principio el número complejo debe tener módulo igual a 1. Es una forma exponencial con exponente imaginario. Este exponente es el argumento, expresado en radianes, multiplicado por la unidad imaginaria. Las tres formas de un mismo número complejo: Polar, Euler y Cartesiana, son:

$$1_\alpha = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

A esta función se le llama  $\operatorname{cis}(\alpha)$

Si el módulo no fuese 1 sería muy similar:

$$m_\alpha = m \cdot e^{i\alpha} = m \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$$

Ejemplos:

$$1_{180^\circ} = e^{i\pi} = \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = 1_{45^\circ} = \cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2_{210^\circ} = 2 \cdot e^{\frac{7\pi}{6}i} = 2(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -\sqrt{3} - 2i$$

$$-3 + 4i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \\ \operatorname{Arg} = \arctg(-4/3) + 180^\circ = 120,97^\circ = 2,11 \text{ rad} \end{array} \right\} = 5_{120,97^\circ} = 5 \cdot e^{2,11i}$$