NÚMEROS COMPLEJOS

1º Calcula el valor de $k \in R$ para que el número complejo $z = \dfrac{4 - k \cdot i^{563}}{3 + i}$ sea imaginario puro.

2º Expresa en forma polar las soluciones de la ecuación en z: $\dfrac{z + i}{z - i} = \dfrac{3(z - i)}{z + i}$

3º Dado el número complejo $z = -2 + 4i$. Calcula:

a) su módulo y argumento, exprésalo en forma polar y trigonométrica;
b) expresa en forma polar su opuesto, conjugado e inverso;
c) calcula z^{10};
d) calcula sus raíces quintas.

4º Si $z = 2 + i$ es una raíz sexta de cierto complejo. Averigua:

a) el resto de raíces sextas;
b) de qué número son raíces sextas.

5º Halla todos los complejos que cumplen que su cubo coincide con su conjugado.

El alumno contestará breve y claramente a cada uno de los siguientes ejercicios, siendo el valor máximo de cada uno ellos el indicado en la siguiente tabla:

1º	2º	3º	4º	5º	Total
1	2	4	2	1	10

① Veamos 1º cuánto es i^{563}.

$$563 \,\underline{|4}\quad 16 \quad 140 \quad 03 \Rightarrow i^{563} = i^3 = -i. \Bigg\} \Rightarrow$$

$$z = \frac{4+ki}{3+i} = \frac{4+ki}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{12-4i+3ki-ki^2}{9-i^2} = \frac{12+k}{10} + i\,\frac{-4+3k}{10}.$$

Para que z sea imaginario puro debe tener la parte real nula:

$$\frac{12+k}{10} = 0 \rightarrow 12+k=0 \Rightarrow \boxed{k=-12}$$

② Operando:

$$(z+i)^2 = 3\cdot(z-i)^2 \Leftrightarrow z^2+2zi+i^2 = 3z^2-6zi+3i^2$$

$$\Leftrightarrow 2z^2-8zi-2=0 \Leftrightarrow \boxed{z^2-4zi-1=0}$$

Es una ecuación de 2º grado:

$$z = \frac{-(-4i)\pm\sqrt{(-4i)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{4i\pm\sqrt{16i^2+4}}{2} = \frac{4i\pm\sqrt{-12}}{2} = 2i\pm\sqrt{-3}.$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1\cdot 3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = i\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow z = 2i \pm i\sqrt{3} = i\left(2\pm\sqrt{3}\right).$$

En forma polar $(2+\sqrt{3})_{90^\circ}$ y $(2-\sqrt{3})_{90^\circ}$

3º Las fórmulas del cambio de forma son:

$$z = a + bi = r_\alpha$$

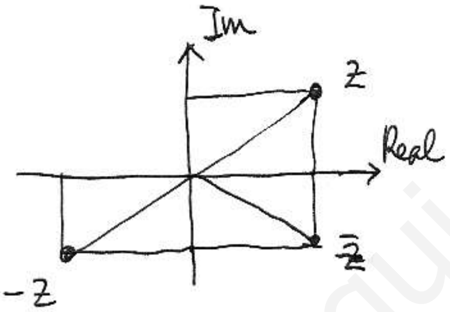
$$\left.\begin{array}{l} r^2 = a^2 + b^2 \\ tg\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\}$$

a) $z = -2+4i = (-2,4) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20 \rightarrow \boxed{r = \sqrt{20}} \\ tg\alpha = \dfrac{4}{-2} \rightarrow \alpha = -64^\circ \text{ ó } -64^\circ + 180^\circ = \\ \qquad\qquad 296^\circ \text{ ó } 116^\circ \end{array}\right.$

$z \in 2^{\circ}$ cuadrante $\rightarrow \boxed{\alpha = 116^\circ}$.

$$\Rightarrow z = \sqrt{20}_{116^\circ} = \sqrt{20} \cdot \cos 116^\circ + i \cdot \sqrt{20} \cdot \operatorname{sen} 116^\circ$$

b)



opuesto $-z = \sqrt{20}_{116^\circ + 180^\circ} = \sqrt{20}_{296^\circ}$

conjugado $\bar{z} = \sqrt{20}_{-116} = \sqrt{20}_{244^\circ}$

inverso $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1_{0^\circ}}{\sqrt{20}_{116^\circ}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)_{-116^\circ} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)_{244^\circ}$

c) $z^{10} = \left(\sqrt{20}_{116^\circ}\right)^{10} = \left(\sqrt{20}\right)^{10}_{10 \cdot 116^\circ} = 20^5_{1160^\circ} \Big\} \boxed{z^{10} = 20^5_{80^\circ}}$

$1160^\circ \,\underline{|\,360}$
$80^\circ \quad 3$

d) $\sqrt[5]{\sqrt{20}_{116^\circ}} = z \Longleftrightarrow \boxed{z^5 = \sqrt{20}_{116^\circ}}$

Expresamos z en forma polar, operamos e igualamos:

$$(r_\alpha)^5 = \sqrt{20}_{116^\circ} \Leftrightarrow r^5_{5\alpha} = \sqrt{20}_{116^\circ} \Longrightarrow$$

Igualdad de módulos: $r^5 = \sqrt{20} \rightarrow r = \sqrt[5]{\sqrt{20}} = \sqrt[10]{20}$.

Igualdad de argumentos: $5\alpha = 116° + 360k \rightarrow \alpha = 23{,}2° + 72k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$k=0 \rightarrow \alpha_0 = 23{,}2° \rightarrow z_0 = \sqrt[10]{20}_{23{,}2°}$

$k=1 \rightarrow \alpha_1 = 95{,}2° \rightarrow z_1 = \sqrt[10]{20}_{95{,}2°}$

$k=2 \rightarrow \alpha_2 = 167{,}2° \rightarrow z_2 = \sqrt[10]{20}_{167{,}2°}$

$k=3 \rightarrow \alpha_3 = 239{,}2° \rightarrow z_3 = \sqrt[10]{20}_{239{,}2°}$

$k=4 \rightarrow \alpha_4 = 311{,}2° \rightarrow z_4 = \sqrt[10]{20}_{311{,}2°}$.

(4°) Como las raíces sextas de un complejo son los vértices de un exágono de centro el origen de coordenadas sus afijos tendrán el mismo módulo y se diferencian 2 consecutivos en 60°.

a) expresemos esa raíz conocida en forma polar.

$z = 2 + i = (2,1) \Rightarrow r^2 = 2^2 + 1^2 = 3 \rightarrow \boxed{r = \sqrt{3}}$

$tg\,\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 27°$ ó $27° + 180° = 207°$.

como $z \in 1^{er}$ cuadrante $\Rightarrow \alpha = 27° \Rightarrow \boxed{z = \sqrt{3}_{27°}}$

El resto de raíces serán

$\sqrt{3}_{27°+60°} = \sqrt{3}_{87°}$ $\quad \sqrt{3}_{87°+60°} = \sqrt{3}_{147°}$ $\quad \sqrt{3}_{147+60} = \sqrt{3}_{207°}$

$\sqrt{3}_{207°+60} = \sqrt{3}_{267°}$ $\quad \sqrt{3}_{267+60°} = \sqrt{3}_{327°}$

b) $(2+i)^6 = \left(\sqrt{3}_{27}\right)^6 = \sqrt{3}^6_{27\cdot 6} = 3^3_{162} = \boxed{27_{162^\circ}}$

5º Sea $z = r_\alpha$ y $\bar{z} = r_{-\alpha}$

$$(r_\alpha)^3 = r_{-\alpha} \iff \boxed{r^3_{3\alpha} = r_{-\alpha}.}$$

Módulos: $r^3 = r \rightarrow r^3 - r = 0 \iff r\cdot(r^2-1) = 0 \Rightarrow r=0, r=1, r=-1.$

$r=-1$ se rechaza por ser negativo.

Argumentos: $3\alpha = -\alpha + 360k \Rightarrow 4\alpha = 360k \rightarrow \alpha = 90k, \ k\in\mathbb{Z}.$

Soluciones:

- si $r=0 \rightarrow z=0.$
- si $r=1 \rightarrow \alpha_0 = 0 \rightarrow 1_{0^\circ} = 1.$

  $\alpha_1 = 90 \rightarrow 1_{90^\circ} = i$

  $\alpha_2 = 180 \rightarrow 1_{180^\circ} = -1$

  $\alpha_3 = 270^\circ \rightarrow 1_{270^\circ} = -i$

Comprobación:

$z = 1$	$z^3 = 1$	$\bar{z} = 1.$
$z = i$	$z^3 = i^3 = -i$	$\bar{z} = -i$
$z = -1$	$z^3 = -1$	$\bar{z} = -1.$
$z = -i$	$z^3 = (-i)^3 = +i$	$\bar{z} = i$
$z = 0$	$z^3 = 0$	$\bar{z} = 0.$