Resuelve tú (Pág ❸❸❶)

Calcula : **(a)** $8 \cdot (7!)$ **(b)** $\dfrac{10!}{(7!)(3!)}$ **(c)** $\dfrac{32!}{30!}$

(a) $8 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 8! = 40\ 320.$

(b) $\dfrac{10!}{7!\cdot 3!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120.$

(c) $\dfrac{32!}{30!} = \dfrac{32\cdot 31\cdot 30!}{30!} = 32\cdot 31 = 992$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❸❷)

Calcula : **(a)** $\binom{8}{2}$ **(b)** $\binom{8}{6}$ **(c)** $\binom{10}{0}$ **(d)** $\binom{10}{10}$

(a) $\binom{8}{2} = \dfrac{8!}{2!(8-2)!} = \dfrac{8!}{2!\cdot 6!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!} = \dfrac{8\cdot 7}{2} = 4\cdot 7 = 28$

(b) $\binom{8}{6} = \dfrac{8!}{6!(8-6)!} = \dfrac{8!}{2!\cdot 6!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!} = \dfrac{8\cdot 7}{2} = 4\cdot 7 = 28$

(c) $\binom{10}{0} = \dfrac{10!}{0!(10-0)!} = \dfrac{10!}{0!\cdot 10!} = \dfrac{10!}{10!} = 1$

(d) $\binom{10}{10} = \dfrac{10!}{10!(10-10)!} = \dfrac{10!}{10!\cdot 0!} = \dfrac{10!}{10!} = 1$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❸❹)

Has decidido ir al cine la próxima semana, pero no el día concreto. Además, dudas entre tres películas. ¿Cuántas opciones distintas tienes? Haz un diagrama en árbol que las enumere una por una.

Sea: L (lunes), M (martes), X (miércoles), J (jueves) y V (viernes), S (sábado), D (domingo),1 (película 1), 2(película 2 y 3 (película 3).

$$\begin{array}{ll} & 1 \Rightarrow L1 \\ L & 2 \Rightarrow L2 \\ & 3 \Rightarrow L3 \\ & 1 \Rightarrow M1 \\ M & 2 \Rightarrow M2 \\ & 3 \Rightarrow M3 \\ & 1 \Rightarrow X1 \\ X & 2 \Rightarrow X2 \\ & 3 \Rightarrow X3 \\ & 1 \Rightarrow J1 \\ J & 2 \Rightarrow J2 \\ & 3 \Rightarrow J3 \\ & 1 \Rightarrow V1 \\ V & 2 \Rightarrow V2 \\ & 3 \Rightarrow V3 \\ & 1 \Rightarrow S1 \\ S & 2 \Rightarrow S2 \\ & 3 \Rightarrow S3 \\ & 1 \Rightarrow D1 \\ D & 2 \Rightarrow D2 \\ & 3 \Rightarrow D3 \end{array}$$

Hay 7 días · 3 películas = 21 posibilidades.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❸❺)

Se va a sortear el orden de actuación de ocho conjuntos de rock participantes en un concurso. ¿De cuántas formas pueden quedar programadas sus actuaciones?

Formas: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\ 320$.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❸❻)

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las ocho letras de;

(a) PALENCIA? **(b)** TENERIFE? **(c)** ZARAGOZA?

(a) PALENCIA tiene 8 letras y se repite dos veces la A, luego:

$P_8^{1,2,1,1,1,1,1} = \frac{8!}{1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{8!}{2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 20160$ palabras distintas pueden formarse.

(b) TENERIFE tiene 8 letras y se repite 3 veces la E, luego:

$$P_8^{1,3,1,1,1,1} = \frac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$$ palabras distintas pueden formarse.

(c) ZARAGOZA tiene 8 letras y se repite 3 veces la A, y 2 veces la Z, luego:

$$P_8^{2,3,1,1,1} = \frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{8!}{2!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2} = 3360$$ palabras distintas pueden formarse.

Resuelve tú (Pág 337)

Y las 24 fichas (12 blancas y 12 negras) de un juego de damas. ¿Cuantas torres de colorido diferente pueden formar?

$$P_{24}^{12,12} = \frac{24!}{12!\cdot 12!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 12!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2704156$$

Resuelve tú (Pág 338)

En un curso de 30 alumnos, ¿de cuántas maneras distintas es posible elegir delegado y subdelegado'?

Como no es lo mismo delegado que subdelegado y deben ser distintos, son variaciones ordinarias.

$V_{30,2} = 30 \cdot 29 = 870$ maneras.

Resuelve tú (Pág 340)

(a) Una cadena de TV organiza un concurso de cultura general entre equipos de 3 estudiantes de 1. de Bachillerato. Las respuestas se dan en equipo, tras consultarse los 3 entre sí.
En un curso de 30 alumnos, ¿de cuántas maneras pueden elegirse un equipo de 3 para participar en ese concurso de TV?

(b) ¿Y si el concurso tuviese una prueba de fuerza, otra de cultura y otra de mímica, y hubiese que elegir el equipo asignando un participante a cada especialidad?

(a) Como el orden no influye y además han de ser 3 distintos son combinaciones ordinarias: $C_{30,3} = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30!}{3!\cdot 27!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27!}{3\cdot 2\cdot 27!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2} = 4060$ maneras.

(b) Ahora si influye el orden y serían variaciones: $V_{30,3} = 30\cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ equipos.

Resuelve tú (Pág ❸❹❸)

Halla el polinomio $(x + 2)^6$ usando el triángulo de Pascal para obtener los coeficientes. Comprueba que coincide con el producto de $(x + 2)$ por el polinomio obtenido para $(x + 2)^5$.

$$(x+2)^6 = \binom{6}{0}x^6 2^0 + \binom{6}{1}x^5 2^1 + \binom{6}{2}x^4 2^2 + \binom{6}{3}x^3 2^3 + \binom{6}{4}x^2 2^4 + \binom{6}{5}x^1 2^5 + \binom{6}{6}x^0 2^6 = 1\cdot x^6\cdot 1 + 6x^5\cdot 2$$
$$+ 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot 8 + 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot 32 + 1\cdot 1\cdot 64 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 132x + 64$$

en donde los coeficientes son los correspondientes a la sexta fila del triángulo de Pascal:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$(x + 2)(x + 2)^5 = (x + 2)(x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32) = x^6 + 10x^5 + 40x^4 + 80x^3 + 80x^2 + 32x + 2x^5 + 20x^4 + 80x^3 + 160x^2 + 160x + 64 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 132x + 64.$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Desarrolla $(x - 2)^6$.

$$(x-2)^6 = \binom{6}{0}x^6 2^0 - \binom{6}{1}x^5 2^1 + \binom{6}{2}x^4 2^2 - \binom{6}{3}x^3 2^3 + \binom{6}{4}x^2 2^4 - \binom{6}{5}x^1 2^5 + \binom{6}{6}x^0 2^6 = 1\cdot x^6\cdot 1 - 6x^5\cdot 2$$
$$+ 15x^4\cdot 4 - 20x^3\cdot 8 + 15x^2\cdot 16 - 6x\cdot 32 + 1\cdot 1\cdot 64 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 132x + 64$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Simplifica:

(a) $\dfrac{12!\cdot 6!}{15!}$ **(b)** $\dfrac{120\cdot 200\cdot 33}{12!}$

(a) $\dfrac{12!\cdot 6!}{15!} = \dfrac{12!\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{15\cdot 14\cdot 13} = \dfrac{6\cdot 4}{7\cdot 13} = \dfrac{24}{91}$

(b) $\dfrac{120\cdot 200\cdot 33}{12!} = \dfrac{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3\cdot 5^2\cdot 3\cdot 11}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \dfrac{5}{3024}$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

2 Calcula:

(a) $\binom{12}{1}\cdot\binom{10}{2}$ **(b)** $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$ **(c)** $\dfrac{\binom{14}{8}}{\binom{13}{6}}$

(a) $\binom{12}{1}\cdot\binom{10}{2}=\frac{12!}{1!\cdot 11!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!}=12\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 8!}=12\cdot 45=540$

(b) $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$

(c) $\dfrac{\binom{14}{8}}{\binom{13}{6}}=\dfrac{\frac{14!}{8!\cdot 6!}}{\frac{13!}{6!\cdot 7!}}=\frac{14!\cdot 7!\cdot 6!}{13!\cdot 8!\cdot 6!}=\frac{14\cdot 13!\cdot 7!}{13!\cdot 8\cdot 7!}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

3 Halla el coeficiente de x^{15} y^5 en el desarrollo de:

(a) $\left(3x+\frac{1}{3}y\right)^{20}$ **(b)** $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^{20}$

En el desarrollo de $(ax+by)^n$ el $T_k=\binom{n}{k-1}(ax)^{n-k+1}\cdot(by)^{k-1}$ luego si y^5 será el sexto término del desarrollo.

(a) $T_6=\binom{20}{5}(3x)^{15}\left(\frac{1}{3}y\right)^5=\frac{20!}{5!\cdot 15!}3^{15}x^{15}\left(\frac{1}{3}\right)^5y^5=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 15!}3^{15}\cdot 3^{-5}x^{15}y^5=3767472x^{15}y^5$

(b) $T_6=\binom{20}{5}(3x)^{15}\left(-\frac{1}{3}y\right)^5=-\frac{20!}{5!\cdot 15!}3^{15}x^{15}\left(\frac{1}{3}\right)^5y^5=-3767472x^{15}y^5$

Lo único que varía es el signo pues al estar el segundo sumando (el negativo) a exponente impar, su potencia es negativa.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

4 Calcula:

(a) $V_{6,4}$ **(b)** $\dfrac{V_{7,4}}{V_{7,5}}$ **(c)** $C_{8,3} \cdot P_3$

(a) $V_{6,4} = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3 = 360.$

(b) $\dfrac{V_{7,4}}{V_{7,5}} = \dfrac{7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4}{7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3} = \dfrac{1}{3}$

(c) $C_{8,3} \cdot P_3 = \dfrac{V_{8,3}}{P_3} \cdot P_3 = V_{8,3} = 8{\cdot}7{\cdot}6 = 336$

5 Resuelve las ecuaciones:

(a) $V_{n,2} = 42$ **(b)** $C_{n,2} = 36$ **(c)** $P_n = 5\,040$ **(d)** $\dbinom{n}{n-1} = 15$

donde n es un entero positivo.

(a) $V_{n,2} = 42$; $n(n-1) = 42$; $n^2 - n - 42 = 0 \Rightarrow n = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \dfrac{1 \pm 13}{2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ como n ha de ser entero positivo n = 7, $V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$. Más rápido (e intuitivo) hubiese sido por 42 como producto de 7 ·6 = n (n – 1) en donde vemos que n = 7.

(b) $C_{n,2} = 36$; $\dfrac{V_{n,2}}{P_2} = 36 \Leftrightarrow V_{n,2} = 36{\cdot}2 = 72 = 9{\cdot}8 \Rightarrow n = 9$

(c) $P_n = n! = 5\,040$, descomponemos $5\,040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ = {*reorganizando factores*} = $7 \cdot (3{\cdot}2)\, 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$, luego n = 7.

(d) $\dbinom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n = 15$

6 En el menú del día un restaurante ofrece para elegir 3 primeros platos, 3 segundos y 4 postres. ¿Cuántos menús distintos se pueden escoger?

Como por cada primer platos se pueden elegir 3 segundos, con 3 primeros se podrán elegir 3 · 3 = 9 combinaciones de los dos primeros platos. Por cada una de estas 9 combinaciones de primeros platos se pueden elegir 4 postres, luego:

Menús = 3 (1^{os}) · 3 (2^{os}) · 4 (postres) = 36 menús

7 Una fábrica de automóviles tiene en su catálogo 6 versiones de motor distintas de su modelo Alhambra. Ofrece además la posibilidad de elegir 7 colores de carrocería y 3 o 5 puertas. ¿Cuántas elecciones permite ese modelo al comprador?

Modelos = 6 (motores) · 7 (colores/motor) · 2 (no puertas/ motor y color) = 84 modelos.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

8 ¿Cuántos números capicúa hay de 8 cifras, incluyendo los que empiezan por 0?

Los capicúas de ocho cifras son de la forma abcddcba, iguales o diferentes. Como disponemos de 10 cifras, que pueden repetirse, en grupos de 4 (añadimos luego esas 4 cifras en orden inverso) pero teniendo en cuenta el orden, se trata de:

$$V^R_{10,4} = 10^4 = 10000 \text{ capicúas}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

9 **(a)** ¿Cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra MURCIA?

(b) ¿Y de cuatro letras distintas?

(a) Como no dice que las cuatro letras tengan que ser diferentes e influye el orden, se trata de variaciones con repetición de 6 letras agrupadas de 4 en 4:

$V^R_{6,4} = 6^4 = 1296$ palabras de 4 letras.

(b) Ahora las 4 letras han de ser diferentes luego son variaciones ordinarias:

$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ palabras de 4 letras distintas.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

1 0 ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra CORUÑA terminan en vocal?

Terminadas en A, es decir de la forma _ _ _ _ _ A, quedan 5 letras para permutar, luego hay $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Pero como hay otras dos vocales (la O y la U), podemos hacer en total 3 (vocales) · 120 (permutaciones/vocal) = 360 permutaciones

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

1 1 ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una estantería 4 libros de Matemáticas, 3 de Química y 5 de Biología, distintos todos ellos, sin separar los de una misma materia?

$$P^{4,3,5}_{12} = \frac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 27720$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

1 2 La plantilla del Sevilla C. F. constará la próxima temporada de 3 porteros, 6 defensas, 5 centrocampistas y 6 delanteros.

(a) ¿Cuántas alineaciones distintas con táctica 4-4-2 podrá formar si cada jugador figura en el papel que le corresponde?

(b) ¿Y si se permite la frivolidad de que un delantero juegue de portero y cosas así?

(a) La táctica 4-4-2 creo que consiste en 4 defensas, 4 centrocampistas y 2 delanteros.

❍ ¿ Cuántos grupos de 4 defensas (distintos evidentemente) pueden formarse con los 6 disponibles?, puede darse dos casos:

◈Influye el orden (que es lo más lógico), es decir, no es lo mismo que Pepe juegue de defensa izquierdo que defensa derecho, cada uno en su puesto, se trata de $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

◈No influye el orden, siempre que sean diferentes, son defensas comodín que lo mismo defienden en el centro que en el ala derecha o izquierda, $C_{6,4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

❍ ¿ Cuántos grupos de 4 centrocampistas pueden formarse con los 5 disponibles?, puede darse dos casos:

◈Influye el orden (que es lo más lógico), es decir, no es lo mismo que Pepe juegue de centrocampista izquierdo que derecho, cada uno en su puesto, se trata de $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

◈No influye el orden, siempre que sean diferentes, son centrocampistas comodín que lo mismo defienden en el centro que en el ala derecha o izquierda, $C_{5,4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{\cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} = 5$.

❍ ¿ Cuántos grupos de 2 delanteros pueden formarse con los 6 disponibles?, puede darse dos casos:

◈Influye el orden (que es lo más lógico), es decir, no es lo mismo que Pepe juegue de delantero izquierdo que delantero derecho, cada uno en su puesto, se trata de $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$

◈No influye el orden, siempre que sean diferentes, son delanteros comodín que lo mismo defienden en el ala derecha o izquierda, $C_{6,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Alineaciones = Porteros · defensas · centrocampistas · delanteros

Las dos posibilidades son :

Alineaciones = 3 · 360 ·120 · 30 = 3 888 000.

Alineaciones = 3 · 15 · 15 · 15 = 10 125.

(b) $C_{20}^{11} = \frac{20!}{11! \cdot 9!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 83980$

1 3 **(a)** ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en un banco alargado?

(b) ¿Y en una mesa redonda?

(a) Hemos de calcular las permutaciones ordinarias de 5 personas ya que se toman todos los elementos y lo único que cambia entre grupos es el orden: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 120 maneras.

(b) Son permutaciones circulares, fijado una persona que se toma como origen , se pueden permutar las 4 restantes: $P_5^{circulares} = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

1 4 Un estudiante ha de elegir 5 cuestiones entre las 10 propuestas en un examen. ¿Cuántas elecciones diferentes puede hacer?

Las 5 cuestiones han de ser, evidentemente, distintas (sin repetición) y no influye el orden, luego se trata de combinaciones de 10 elementos tomados de 5 en 5:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 252 \text{ elecciones puede hacer.}$$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

1 5 ¿De cuántas formas se pueden regalar 4 lotes de 3 libros cada uno, con 12 libros diferentes?

El orden de los lotes no importa, lo que si importa es los 3 libros de que consta cada lote, luego son $P_{12} = 12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$ formas.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

AUTOEVALUACIÓN

① Enuncia la regla del producto de opciones. Aplícala para calcular cuántas matrículas de automóvil distintas se pueden rotular con cuatro cifras y dos letras (suponiendo que se usan para ello sólo 20 letras del alfabeto).

Con 10 cifras, pudiendo repetirse, en grupos de 4, influyendo el orden entre los grupos (no es lo mismo 1234 que 1342, teniendo los mismos elementos) se pueden formar $V^R_{10,4} = 10^4$.

Con 20 letras, que pueden repetirse, en grupos de 2, influyendo el orden, se pueden formar $V^R_{20,2} = 20^2 = 400$.

10 000 grupos de números · 400 grupos de letras = **4 000 000 de matrículas**.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

2 ¿Cómo se define el factorial de un número? Calcula 4!

n! = n · (n –1)·(n – 2) · (n – 3) · ··· ·3 · 2 ·1, es decir el producto de los factores enteros consecutivos decrecientes que empiezan en n y terminan en 1.

4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24.

3 Define $\binom{n}{r}$ ¿Por qué se llaman números combinatorios? Calcula $\binom{5}{0}$, $\binom{7}{1}$ y $\binom{9}{7}$.

$\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=C_{n,r}$, se llaman números combinatorios por que equivale a las combinaciones de n elementos tomados de r en r.

$$\binom{5}{0}=\frac{5!}{0!\cdot 5!}=1;\ \binom{7}{1}=\frac{7!}{1!\cdot 7!}=1\ ;\ \binom{9}{7}=\frac{9!}{7!\cdot 2!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 2}=\frac{9\cdot 8}{2}=36.$$

4 Escribe las variaciones (sin repetición) y las combinaciones de las vocales a, e, i, o, u tomadas de dos en dos.

$V_{5,2}$ = 5 · 4 = 20, que son: ae, ai, ao, au, ea, ei, eo, eu, ia, ie, io, iu, oa, oe, oi, ou, ua, ue, ui, uo

$C_{5,2}=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 3!}=\dfrac{20}{2}=10$, la mitad de las anteriores pues ahora ae = ea, etc.

5 Indica las igualdades que sean incorrectas:

(a) 6! - 4! = 2!

(b) 5 . (4!) = 5!

(c) 3 · (n!) = (3n)!

(d) $\dfrac{124!}{123!}=124$

(a) 6! – 4! = 6 · 5 ·4! – 4! = 4!(6 · 5 – 1) = 4! · 29 ≠ 2! = 2. Falso

(b) 5 · 4! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5!. Verdadero

(c) (3n)! = 3n (3n –1) ··· 3·2·1 ≠ 3 · n · (n – 1) ... ·3·2·1. Falso.

(d) $\frac{124!}{123!} = \frac{124 \cdot 123!}{123!} = 124$. Verdadero.

❈❈❈❀❀✪❀❀❈❈❈

6 ¿De cuántas maneras se puede llenar una estantería, en la que caben 4 botellas, si se dispone de 6 botellas distintas?

No se pueden repetir y no influye el orden, luego:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2}$$

Si influye el orden sería $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ formas.

❈❈❈❀❀✪❀❀❈❈❈

7 Resuelve las ecuaciones:

(a) $P_n = 720$
(b) $V_{6,r} = 120$
(c) $V_{n,3}^{rep} = 125$
(d) $\binom{n}{n-2} = 45$

(a) $P_n = n! = 720 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$, $n = 6$.

(b) Descomponemos $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ = {reordenando} = $6 \cdot 5 \cdot 4 = V_{6,3}$, luego $r = 3$.

(c) $125 = 5^3 = V_{5,3}^R \Rightarrow n = 5$.

(d) $\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$

ecuación de 2º grado, que resolvemos: $n = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{2} = \frac{1 \pm 19}{2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix}$; $n = 10$

❈❈❈❀❀✪❀❀❈❈❈

8 ¿Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar con las letras de:

(a) VINAROZ? **(b)** BENIDORM?

(a) Influye el orden y no se pueden repetir luego son $V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ las palabras de cuatro letras distintas.

(b) También son variaciones ordinarias $V_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ palabras de cuatro letras.

❈❈❈❀❀✪❀❀❈❈❈

9 Con 16 licores distintos, ¿cuántos cócteles de tres ingredientes se pueden preparar?

Si los ingredientes son los mismos, no importa el orden en que se mezclen y como no pueden repetirse, se trata de :

$$C_{16,3} = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13!}{3\cdot 2\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2} = 560$$ cócteles distintos pueden prepararse.

10 Con 4 camisas, 3 pantalones y 2 pares de zapatos, ¿cuántas indumentarias diferentes se pueden elegir? Haz un diagrama en árbol que las enumere.

Indumentarias = 4 camisas · 3 pantalones/ camisa · 2 pares de zapatos/ pantalón y camisa = 24 indumentarias.

- Camisa1
  - pantalón 1
    - par de zapatos 1 → C 1 p 1 z 1
    - par de zapatos 2 → C 1 p 1 z 2
  - pantalón 2
    - par de zapatos 1 → C 1 p 2 z 1
    - par de zapatos 2 → C 1 p 2 z 2
  - pantalón 3
    - par de zapatos 1 → C 1 p 3 z 1
    - par de zapatos 2 → C 1 p 3 z 2
- Camisa2
  - pantalón 1
    - par de zapatos 1 → C 2 p 1 z 1
    - par de zapatos 2 → C 2 p 1 z 2
  - pantalón 2
    - par de zapatos 1 → C 2 p 2 z 1
    - par de zapatos 2 → C 2 p 2 z 2
  - pantalón 3
    - par de zapatos 1 → C 2 p 3 z 1
    - par de zapatos 2 → C 2 p 3 z 2
- Camisa3
  - pantalón 1
    - par de zapatos 1 → C 3 p 1 z 1
    - par de zapatos 2 → C 3 p 1 z 2
  - pantalón 2
    - par de zapatos 1 → C 3 p 2 z 1
    - par de zapatos 2 → C 3 p 2 z 2
  - pantalón 3
    - par de zapatos 1 → C 3 p 3 z 1
    - par de zapatos 2 → C 3 p 3 z 2
- Camisa4
  - pantalón 1
    - par de zapatos 1 → C 4 p 1 z 1
    - par de zapatos 2 → C 4 p 1 z 2
  - pantalón 2
    - par de zapatos 1 → C4 p 2 z 1
    - par de zapatos 2 → C 4 p 2 z 2
  - pantalón 3
    - par de zapatos 1 → C4 p 3 z 1
    - par de zapatos 2 → C4 p 3 z 2

① ① ¿Es lo mismo variaciones de n objetos distintos tomados de n en n que permutaciones de esos n objetos?

Si ambas son sin repetición, sí : $V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

① ② Un entrenador de baloncesto dispone de 3 bases, 4 aleros y 3 pivots.

(a) ¿Cuántos cincos iniciales distintos, de un base, dos aleros y dos pivots, puede hacer saltar a la cancha respetando la especialidad de cada jugador?

(b) ¿Y si no se respeta?

(a) 3 bases · ($C_{4,2}$ aleros) · ($C_{3,2}$ pivots) = 3 · 6 · 3 = 54 equipos.

(b) Ahora son combinaciones de 1º jugadores tomadas de 5 en 5:

$$C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 252 \text{ equipos.}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

① ③ Calcula, usando cancelaciones en el numerador y en el denominador, los siguientes cocientes:

(a) $\frac{203!}{200!}$ **(b)** $\frac{8!}{6!\cdot 2!}$ **(c)** $\frac{30!\cdot 10!}{29!\cdot 12!}$

(a) $\frac{203!}{200!} = \frac{203\cdot 202\cdot 201\cdot 200!}{200!} = 203\cdot 202\cdot 201 = 8242206$

(b) $\frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 4\cdot 7 = 28$

(c) $\frac{30!\cdot 10!}{29!\cdot 12!} = \frac{30\cdot 29!\cdot 10!}{29!\cdot 12\cdot 11\cdot 10!} = \frac{30}{12\cdot 11} = \frac{30}{132}$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

① ④ ¿Cuántas permutaciones distinguibles admiten las letras de:

(a) BALEARES? **(b)** CANARIAS?

(a) Hay 8 letras, pero se repiten 2 veces la A y 2 veces la E , luego:

$$P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2} = 10080$$

(b) CANARIAS, tiene 8 letras repitiéndose 3 veces la A:

$$P_8^{3,1,1,1,1,1} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

➀ ➄ ¿Por qué tiene simetría izquierda-derecha el triángulo de Pascal? ¿Para qué se emplea ese triángulo?

La simetría es debida a que: $C_{m,n} = \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} = C_{m,m-n}$

Se emplea para calcular los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton $\binom{n}{i}$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

➀ ➅ Desarrolla:

(a) $(x - 1)^5$ **(b)** $(2x + 0{,}5)^4$

(a) $(x-1)^5 = \binom{5}{0}x^5 - \binom{5}{1}x^4 + \binom{5}{2}x^3 - \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{4}x - \binom{5}{0}x^0 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1$

(b) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3\left(\frac{1}{2}\right) + \binom{4}{2}(2x)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}(2x)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$

$$= 1(16x^4) + 4(8x^3)\frac{1}{2} + 6(4x^2)\frac{1}{4} + 4(2x)\frac{1}{8} + 1\frac{1}{16} = 16x^4 + 16x^3 + 6x^2 + x + \frac{1}{16}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

➀ ➆ ¿Cuántas fichas tendría un juego de dominó que tenga sólo blanco, uno, dos y tres puntos?

Si el dominó tiene n puntos, serán dobles n fichas y no dobles $C_{n,2}$, en nuestro caso n = 4, luego habrá 4 + $C_{4,2}$ = 4 + $V_{4,2}/P_2$ = 4 + (4 · 3)/2 = 4 + 12/2 = 4 + 6 = 10 fichas.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

➀ ➇ A un concierto gratuito acuden 602 jóvenes. Como la sala sólo tiene 600 asientos, se sortea para ver quiénes entran al concierto. ¿Cuántos resultados distintos pueden ocurrir en ese sorteo?

Son $C_{602,600} = \binom{602}{600} = \frac{602!}{600!\cdot 2!} = \frac{602\cdot 601\cdot 600!}{600!\cdot 2} = \frac{602\cdot 601}{2} = 180901$