

Resuelve tú ( Pág 293 )

Las puntuaciones de una prueba de inteligencia aplicada a los 75 alumnos anteriores han sido:

87 105 88 103 114 125 108 107 118 114 129 100 106  
 113 105 111 94 115 89 82 141 92 132 112 97 135  
 101 104 130 99 114 91 145 95 101 115 104 87 108  
 115 103 132 110 113 102 109 124 98 140 107 93 108  
 122 117 114 141 116 108 102 101 118 138 99 105 112  
 94 96 132 118 123 108 131 127 100 91

Agrupar los datos en intervalos de amplitud 8. Elabora una tabla similar a la anterior

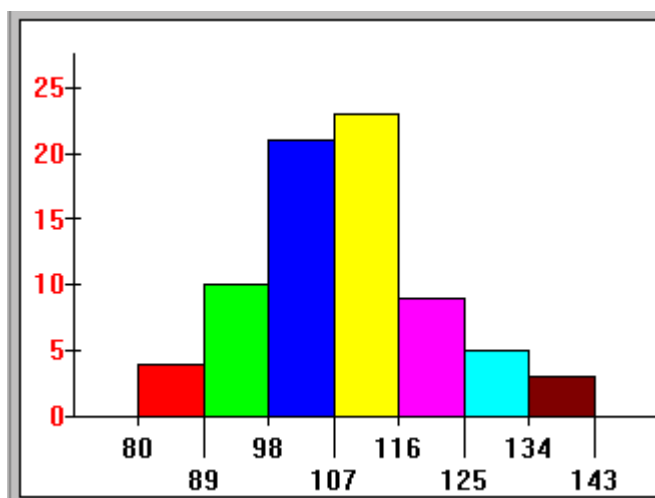


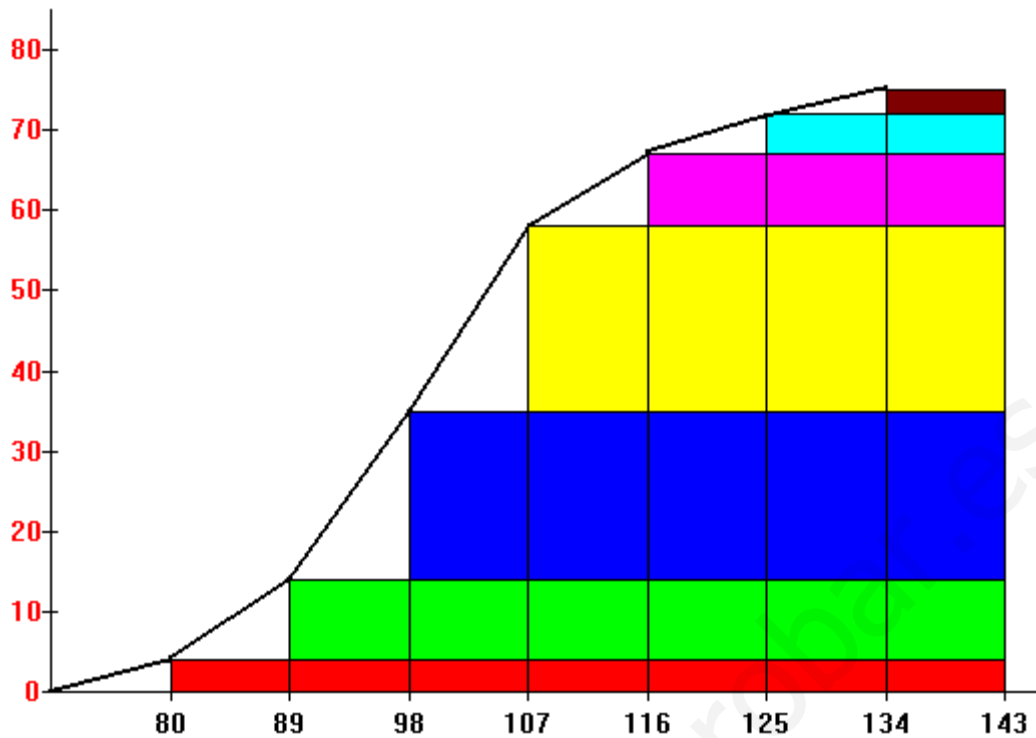
Intervalos	M.c.	$f_i$	$fr_i$	%	$F_i$	$Fr_i$	%a
80 – 88	84	4	0'053...	5'3...	4	0'053...	5'3
89 – 97	93	10	0'13...	13'3...	14	0'186...	18'6...
98 – 106	102	21	0'28	28	35	0'46...	46'6...
107 – 115	111	23	0'306...	30'6...	58	0'773...	77'3...
116 – 124	120	9	0'12	12	67	0'893...	89'3...
125 – 133	129	5	0'06...	6'6...	72	0'96	94
134 - 142	138	3	0'04	4	<b>75</b>	<b>1</b>	<b>100</b>
<b>TOTALES</b>		<b>75</b>	<b>1</b>	<b>100</b>			



Resuelve tú ( Pág 295 )

Dibuja el histograma y la poligonal acumulada asociados a las puntuaciones de la prueba de inteligencia expuestos en el Resuelve tú del Ejercicio de aplicación 1.





PROBLEMAS PROPUESTOS

1 En una prueba de velocidad lectora aplicada a 42 estudiantes, las puntuaciones obtenidas, en palabras por minuto, fueron:

- 70 80 43 105 112 71 96 81 58 57 80 81 73 99 57
- 74 87 48 90 47 109 90 69 79 75 52 72 81 91 56
- 67 66 79 90 106 100 87 104 75 110 53 98

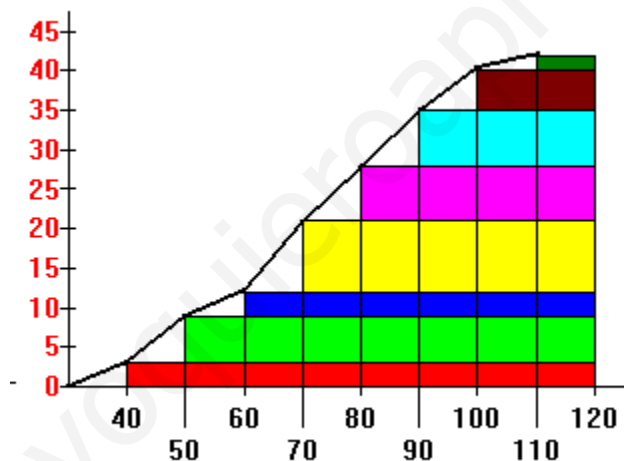
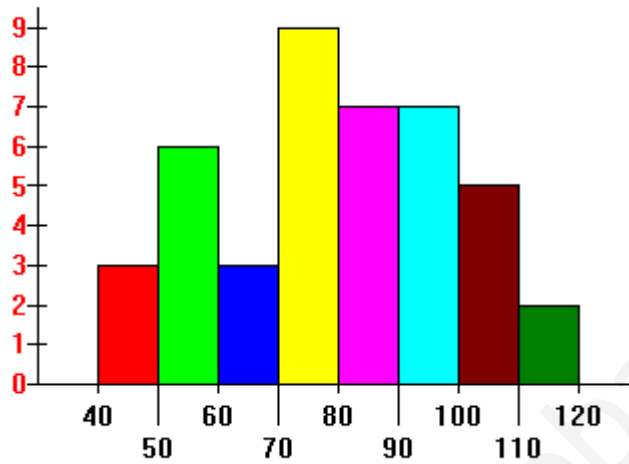
Agrupar estos datos en intervalos de clase. Presentar los resultados en una tabla de frecuencias absolutas, relativas y de porcentaje.



Intervalos	M.c.( $x_i$ )	$f_i$	$fr_i$	%	$F_i$	$Fr_i$	%a
[ 40, 50)	45	3	0'07143	7'143	3	0'07143	7'143
[ 50, 60)	55	6	0'143	14'3...	9	0'21443	21'443
[ 60, 70)	65	3	0'07143	7'143	12	0'28586	28'6
[ 70, 80)	75	9	0'2143	21'43	21	0'50016	50
[ 80, 90)	85	7	0'16...	1'6...	28	0'66827	66'83...
[ 90, 100)	95	7	0'16...	1'6...	35	0'8335	83'35
[ 100, 110)	105	5	0'119	11'9	40	0'9525	95'25
[ 110, 120)	115	2	0'0476	4'76	<b>42</b>	<b>1</b>	<b>100</b>
<b>TOTALES</b>		<b>42</b>	<b>1</b>	<b>100</b>			



2 Representa los datos del problema anterior mediante un histograma. Construye también el polígono de frecuencias acumulativo.



3 Para el Problema 1, calcula la media cuando los datos se consideran individualmente y cuando se consideran agrupados. Justifica la diferencia de los resultados.



⊕ **Datos no agrupados:**

$$\bar{x} = \frac{70 + 80 + 43 + 105 + 112 + \dots + 104 + 75 + 110 + 53 + 98}{42} = \frac{3318}{42} = 79$$

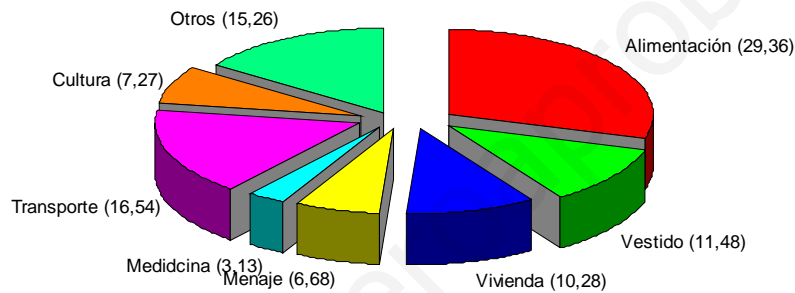
⊕ **Datos agrupados :**



5 Desde 1993, para el cálculo del IPC (índice de precios al consumo), se tienen en cuenta los siguientes sectores de consumo con los « pesos » que se indican:

Sector	Peso
Alimentación	29'36
Vestido	11'48
Vivienda	10'28
Menaje	6'68
Medicina	3'13
Transporte	16'54
Cultura	7'27
Otros	15'26

Representa, mediante un diagrama circular, los pesos de cada uno de los sectores indicados en la tabla anterior.



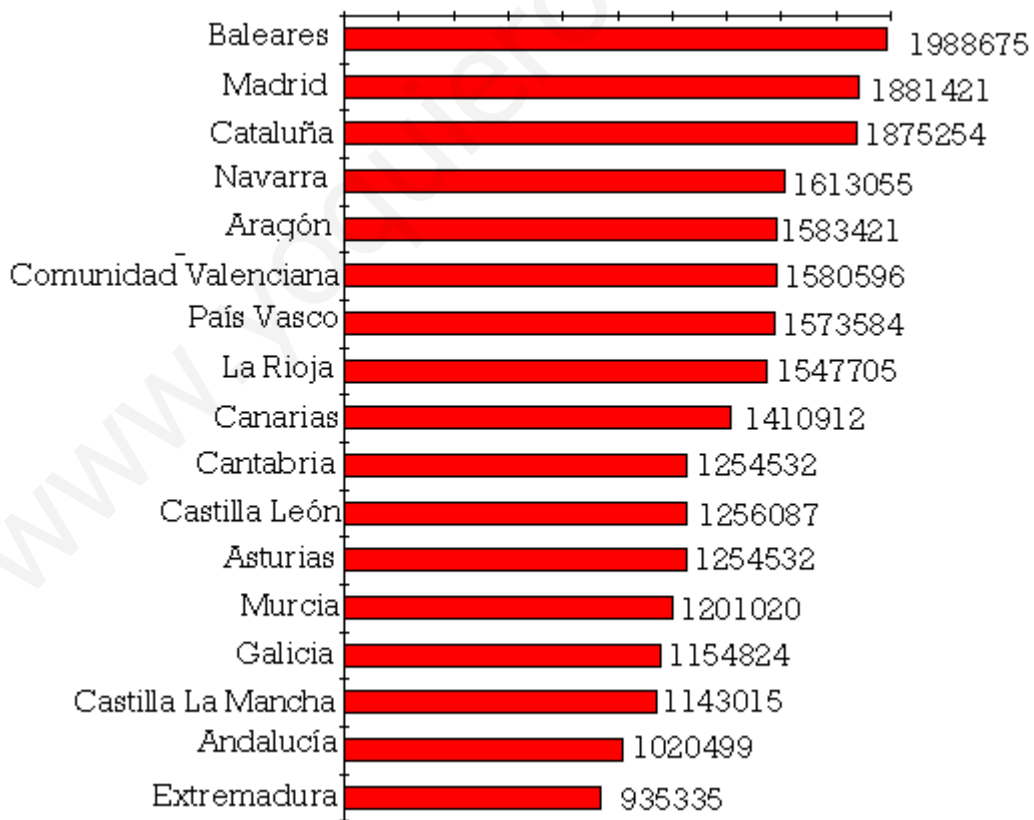
6 Representa, de mayor a menor y mediante un diagrama de barras horizontales, el PIB (Producto Interior Bruto) por Comunidades Autónomas, para el año 1991, cuyos datos vienen expresados en el cartograma adjunto.





Elaboramos primero la tabla :

Comunidades	PIB
Baleares	1988675
Madrid	1881421
Cataluña	1875254
Navarra	1613055
Aragón	1583421
Comunidad Valenciana	1580596
País Vasco	1573584
La Rioja	1547705
Canarias	1410912
Cantabria	1254532
Castilla León	1256087
Asturias	1254532
Murcia	1201020
Galicia	1154824
Castilla La Mancha	1143015
Andalucía	1020499
Extremadura	935335



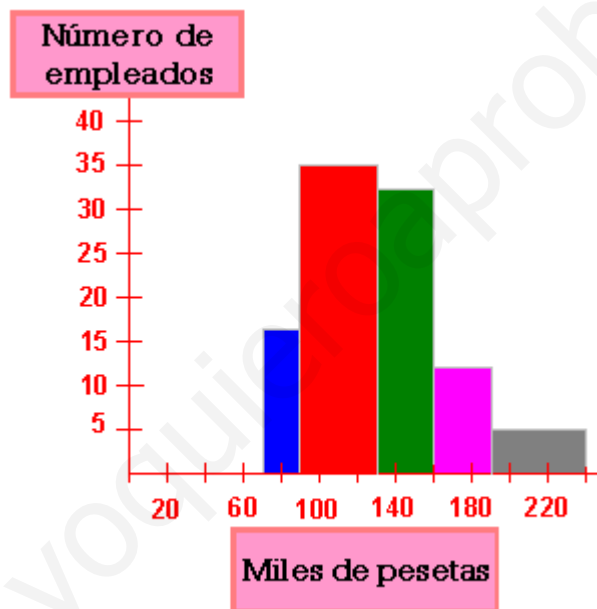
7 Los salarios, en miles de pesetas, de 100 empleados de una empresa vienen dados por la tabla:

Miles de pesetas	Número de empleados
70-90	16
90-130	35
130-160	32
160-190	12
190-240	5

- (a) Construye el histograma asociado a estos datos.
- (b) Halla la media y la desviación típica de los salarios.



(a)



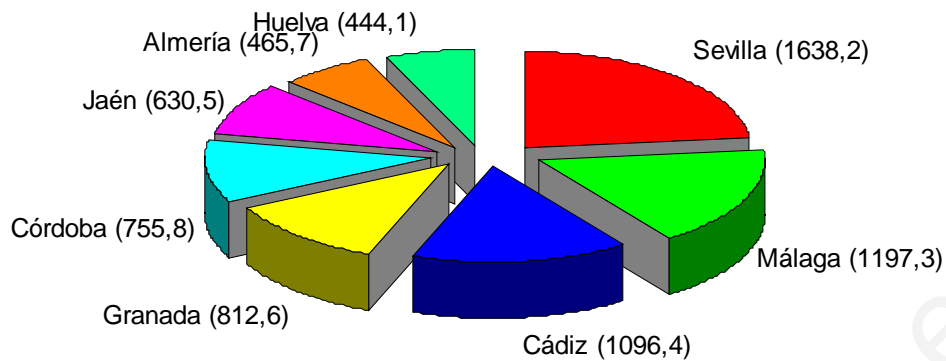
(b)

Elaboramos la tabla base de cálculo :

Clases	Marca de clase ( $x_i$ )	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$x_i^2$	$f_i \cdot x_i^2$
[ 70, 90)	80	16	1280	1600	25600
[ 90, 130)	110	35	3850	12100	423500
[130 , 160)	145	32	4640	21025	672800
[160, 190)	175	12	2100	30625	367500
[190, 240 )	215	5	1075	46225	231125
		<b>100</b>	<b>12945</b>		<b>1720525</b>
		$\sum f_i$	$\sum f_i \cdot x_i$		$\sum f_i \cdot x_i^2$







9 Para los datos de la Tabla 15.1, halla la moda, la mediana, la media y la desviación típica de las estaturas de los alumnos.



La tabla correspondiente es :

Intervalos			f	x	f.x	f.x <sup>2</sup>	P (%)
150	155		2	152.500	305.000	46512.5000	2.6667
155	160		6	157.500	945.000	148837.5000	10.6667
160	165		10	162.500	1625.000	264062.5000	24.0000
165	170		15	167.500	2512.500	420843.7500	44.0000
170	175		25	172.500	4312.500	743906.2500	77.3333
175	180		8	177.500	1420.000	252050.0000	88.0000
180	185		5	182.500	912.500	166531.2500	94.6667
185	190		4	187.500	750.000	140625.0000	100.0000
				Sumas :	12782.500	2183368.7500	

En donde los intervalos son semiabiertos de la forma [ 150, 155), [ 155, 160), es decir incluyen el límite inferior pero no el superior:

**Moda (Mo) :**

La clase modal es [ 170, 175) en la que se encuentran las alturas de 25 alumnos.

Par su cálculo usamos la fórmula :

$$Mo = L_i + a \frac{f_{i+1}}{f_{i+1} + f_{i-1}} = 170 + 5 \frac{8}{8 + 15} = 171'74 \text{ cm}$$

En donde las variables significan :

$L_i$  = límite inferior del intervalo o clase modal = 170.

$a$  = Amplitud del intervalo = 5.

$f_{i+1}$  = frecuencia del intervalo siguiente al modal = 8.

$f_{i-1}$  = frecuencia del intervalo anterior al modal = 8.

**Mediana (Me) :**

Como hay 75 datos la median estará en (  $75/2 = 37'5$  ) el intervalo [ 170, 175) y la hallamos mediante la fórmula :

$$Me = L_i + a \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} = 170 + 5 \frac{\frac{75}{2} - 33}{25} = 170'9 \text{ cm}$$

En donde las variables significan :

$L_i$  = límite inferior del intervalo o clase mediana = 170.

$a$  = Amplitud del intervalo = 5.

$f_i$  = frecuencia del intervalo de la mediana = 25.

$F_{i-1}$  = frecuencia acumulada hasta el intervalo anterior al de la mediana = 33.

$N$  = número total de datos = 75.

**Media (  $\bar{x}$  ) :**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{12782'5}{75} = 170'43 \text{ cm}$$

**Desviación típica (  $\sigma$  ) :**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{2183368'75}{75} - 170'43^2} = 8 \text{ cm}$$



10 Un trabajador cobra por horas según el siguiente baremo:

Hora normal (lunes a viernes):  $x_n = 1.000$  ptas.

Hora extra (lunes a viernes):  $x_e = 2.000$  ptas.

Hora extra fin de semana:  $x_f = 2.500$  ptas.

Sabiendo que entre semana ha realizado  $p_n = 28$  horas de trabajo ordinario y  $p_e = 10$  horas extras.

(a) Si trabaja  $p_f = 6$  horas el fin de semana, ¿cuál es su sueldo medio por hora esa semana?

(b) ¿Cuántas horas debe trabajar durante ese fin de semana para tener un sueldo medio de 1.560 ptas. por hora?



(a) Se trata de una media aritmética ponderada :

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{p_n \cdot x_n + p_e \cdot x_e + p_f \cdot x_f}{p_n + p_e + p_f} = \frac{28 \cdot 1000 + 10 \cdot 2000 + 6 \cdot 2500}{28 + 10 + 6} = \frac{63000}{44} \approx 1432 \text{ ptas}$$

(b) Ahora hemos de despejar  $p_f$  de la fórmula :

$$\frac{28 \cdot 1000 + 10 \cdot 2000 + p_f \cdot 2500}{28 + 10 + p_f} = \frac{48000 + 2500p_f}{38 + p_f} = 1560 \text{ ptas} \Leftrightarrow 940p_f = 11280 \Leftrightarrow p_f = 12$$



11 En la Figura 15.11 se observa que el PIB per cápita para las comunidades de Madrid, Castilla-La Mancha y Andalucía son, respectivamente, 1.881.421, 1.143.015 y 1.020.499 ptas. Sabiendo que los habitantes de las comunidades citadas, también respectivamente y para la misma fecha, eran 5.031.000, 1.651.800 y 7.040.600, calcula:

(a) El ingreso total de cada comunidad.

(b) El PIB conjunto para las tres comunidades.



**(a) Ingresos totales :**

**Madrid** = PIB · habitantes = 1 881 421 · 5 031 000 = 9'465 · 10<sup>12</sup> ptas.

**Castilla - La Mancha** = PIB · habitantes = 1 143 015 · 1 651 800 = 1'888 · 10<sup>12</sup> ptas.

**Andalucía** = PIB · habitantes = 1 020 499 · 7 040 600 = 7'185 · 10<sup>12</sup> ptas.

**(b) PIB Conjunto :**

Media aritmética ponderada :

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{p_M \cdot x_M + p_C \cdot x_C + p_A \cdot x_A}{p_M + p_C + p_A} = \frac{9'465 \cdot 10^{12} + 1'888 \cdot 10^{12} + 7'185 \cdot 10^{12}}{5031000 + 1651800 + 7040600} = 1350930 \text{ ptas}$$



**12** Cuatro grupos de bachillerato de 30, 32, 35 y 21 alumnos, obtuvieron, respectivamente, 6, 5,3, 4,5 y 6,1 de nota media en inglés. Halla la nota media de todos los alumnos en esa asignatura.



De nuevo aplicamos la media aritmética ponderada :

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{30 \cdot 6 + 32 \cdot 5,3 + 35 \cdot 4,5 + 21 \cdot 6,1}{30 + 32 + 35 + 21} = \frac{635,2}{118} \approx 5,4$$



**13** Considera los siguientes datos: 1, 3, 5, 7, 9.

**(a)** Calcula su media, varianza y desviación típica.

**(b)** Suma 20 a cada uno de los datos iniciales. ¿Qué efecto se produce en los parámetros anteriores?

**(c)** ¿Puedes sacar alguna conclusión general sobre el efecto que se produce en la media y en la desviación típica al sumar a los datos iniciales una constante?



$$(a) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1+9+25+49+81}{5} - 25 = 33 - 25 = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2'83$$

(b) Los datos de partida son : 21, 23, 25 27 y 29

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{N} = \frac{21+23+25+27+29}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{441+529+625+729+841}{5} - 625 = 633 - 625 = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2'83$$

La media aumenta en 20 y la varianza y desviación típica no se modifican.

(c) Se cumple  $x(x_i + k) = x(x_i) + k$  y  $\sigma(x_i + k) = \sigma(x_i)$



14 Multiplica por 20 los datos del problema anterior. Vuelve a calcular los parámetros. Compara el resultado con el hallado anteriormente. ¿Qué sucede con los parámetros cuando se multiplican todos los datos por una constante?



Los datos de partida son : 20, 60, 100, 140 y 180

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{N} = \frac{20+60+100+140+180}{5} = \frac{500}{5} = 100 = 5 \cdot 20$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{400+3600+10000+19600+32400}{5} - 10000 = 13200 - 10000 = 3200 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3200} \approx 56'57$$

La media se multiplica por 20, la varianza por 20<sup>2</sup> y la desviación típica por 20.

$x(x_i \cdot k) = x(x_i) \cdot k$ ,  $\sigma(x_i \cdot k) = k \sigma(x_i)$  y  $\sigma^2(k \cdot x_i) = k^2 \sigma^2(x_i)$



**15** En una empresa el sueldo medio de los trabajadores es de 100.000 ptas./mes, con una desviación típica de 30.000 ptas. Para el próximo convenio laboral, la empresa ofrece un aumento lineal de 10.000 ptas./mes a cada trabajador o bien un incremento del 10 % a cada uno de ellos. ¿A cuánto ascenderá el nuevo sueldo medio? ¿Qué opción es la que crea más desigualdad en los sueldos?



Si el aumento lineal es de 10 000 pts, según hemos visto en el ejercicio N° 13, el sueldo medio aumentará en 10 000 ptas y será, por tanto, de 110 000 ptas. Si se aumenta un 10 % a cada uno , estos quedan multiplicados por 1'1( ejercicio N° 15) y el nuevo sueldo medio también es decir  $100\ 000 \cdot 1'1 = 110\ 000$  pts/ mes, igual que en el otro caso.

Para medir las desigualdades acudimos a las medidas de dispersión, la desviación típica que tiene unidades lineales :

- ⊗ En el caso de aumento de 10 000 ptas/mes, la desviación típica de la población no se modifica y por tanto no aumentan las desigualdades.
- ⊗ En el caso de un incremento del 10 % el sueldo queda multiplicado por 1'1 y su desviación típica será de  $30\ 00 \cdot 1'1 = 33\ 000$  ptas, y por tanto aumenta la dispersión y la desigualdad entre sueldos.



**16** Una persona viaja de Valencia a Sevilla a una velocidad media de 80 km/h. y regresa a una media de 100 km/h. Halla la velocidad media del viaje completo.



Sea x el número de km que hay de valencia a Sevilla.

▣ Usando un media aritmética ponderada :

$$\bar{x} = \frac{80x + 100x}{2x} = \frac{180x}{2x} = \frac{180}{2} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

▣ Utilizando la física :  $v = e/t$

Tiempo medio en la ida )  $t_i = x/ v_{ida} = x /80$

Tiempo medio en la vuelta  $t_v = x/v_v = x/ 100$

Tiempo total  $t = t_i + t_v = x ( 1/80 + 1/100)$

Espacio total recorrido  $e_t = 2x$

$$v_m = \frac{e_t}{t} = \frac{2x}{x \left( \frac{1}{80} + \frac{1}{100} \right)} = \frac{2 \cdot 8000}{180} = \frac{800}{9} \approx 89 \text{ km/h}$$



**AUTOEVALUACIÓN**

1 Si se conoce la provincia de nacimiento de cada uno de los alumnos de una clase, justifica si puede hallarse:

- (a) La media y la representación gráfica de los datos mediante un diagrama acumulativo.
- (b) La moda y representación gráfica de los datos mediante un diagrama simple.



(a) Como son datos cualitativos no puede hallarse la media aritmética ni representarlos en un diagrama acumulativo que necesita que los datos sean de variable cuantitativa continua.

(b) La moda, será la provincia en la que hayan nacido más alumnos ( en la que está “ más de moda” nacer ) y se puede hacer un diagrama de barras ( horizontal o vertical) o de sectores.



2 ¿Cuándo tienes más información sobre un conjunto de datos?

- (a) Cuando conoces sólo la moda.
- (b) Cuando conoces sólo la media aritmética;
- (c) En los dos casos es incompleta; sería bueno conocer además la ...



(c) La desviación típica pues podemos tener el mismo valor de las medidas de posición pero ser una población más dispersa que otra ( 1 y 9, 5 y 5, por ejemplo).



3 ¿Cuáles son las fórmulas de la media y de la desviación típica? Sin ayuda de calculadora halla  $\bar{x}$  y  $\sigma$  para los datos 2, 4 y 6.



Variable discreta y datos no agrupados :

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$D.T. = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{4 + 16 + 36}{3} - 16} = \sqrt{\frac{56}{3} - 16} = \sqrt{2'6} \approx 1'63$$



4 Para dos conjuntos de datos, es más homogéneo:

- (a) Aquel cuya desviación típica es menor.
- (b) El que tiene un menor coeficiente de variación.



Si ambas poblaciones tiene la misma media bastaría con comparar las desviaciones típicas para saber que el más homogéneo será el de menor desviación típica, pero como en general no será así, hay que tener en cuenta la media, luego par una comparación relativa habría que acudir al coeficiente de variación, respuesta **(b)**.



5 En un histograma la anchura de los intervalos de clase es 8. ¿Qué altura corresponderá a un rectángulo que represente una frecuencia de 40?

- (a) 5
- (b) 40
- (c) 320
- (d) No hay una medida fija.



Altura = frecuencia/ anchura = 40/8 = 5, ya que el área ha de ser proporcional a la frecuencia. Respuesta **(a)**.



6 Una variable estadística presenta 3 posibilidades con frecuencias 15, 10 y 5. Si queremos representar esos datos mediante un diagrama circular habrá que dividir el círculo en sectores de amplitud:

- (a) 15°, 10° y 5°.
- (b) 150°, 100° y 50°.



(c) 180°, 120° y 60°.



La amplitud de cada sector es proporcional a su frecuencia es decir  $\alpha_i = f_i \cdot \frac{360^\circ}{N}$  :

$$\alpha_1 = f_1 \cdot \frac{360^\circ}{N} = 15 \cdot \frac{360^\circ}{30} = 180^\circ, \alpha_2 = f_2 \cdot \frac{360^\circ}{N} = 10 \cdot \frac{360^\circ}{30} = 120^\circ, \alpha_3 = f_3 \cdot \frac{360^\circ}{N} = 5 \cdot \frac{360^\circ}{30} = 60^\circ,$$

Luego la opción correcta es la **(c)**.



7 Para representar gráficamente la renta per cápita por Comunidades Autónomas, el tipo de gráfico menos apropiado será:

- (a) De barras.
- (b) Histograma.
- (c) Acumulativo.
- (d) Cartograma.



El acumulativo que nos dificultará apreciar las diferencias entre ellas.



8 Dada la serie de datos 1, 1, 1, 3, 4, 5. Su moda, mediana y media son, respectivamente:

- (a) 1 2 2,5
- (b) 1 No existe 2,5
- (c) 1 3 2,5
- (d) 1 1 1



Moda = valor de mayor frecuencia = 1.

- Mediana = valor central =  $(1+3)/2 = 2$  ( son pares y hay dos centrales el 1 y el 3).
- Media =  $( 1+1+1+3+4+5)/6 = 15/6 = 5/2 = 2'5$ .

Opción correcta : **(a)** .



9 A los alumnos de un grupo de Bachillerato se les ha preguntado: (1) Su deporte favorito; (2) El número de horas que estudia a la semana. Con esos datos podemos hallar:

- (a)** La media de ambos conjuntos de datos.
- (b)** La moda de (1) y la media de (2).
- (c)** La mediana de (1) y la desviación típica de (2).
- (d)** Histogramas asociados a cada conjunto de datos.



La primera variable es cualitativa y la segunda cuantitativa continua, luego :

- (a)** No se puede hallar la media de la variable deporte al ser cualitativa.
- (b)** Es la opción correcta.
- (c)** No es posible hallar la mediana de datos de variable cualitativa.
- (d)** Sólo es posible dibujar el histograma si es una variable cuantitativa continua y la primera no lo es.



10 Tres conjuntos de datos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:

- [1] 7 y 1      [2] 14 y 3      [3] 21 y 2

¿Cuál es el conjunto más disperso? ¿Y el más homogéneo?



El más disperso es el que tiene mayor desviación típica ( medida de dispersión ) es decir el **[2]**.

El más homogéneo es el que tiene menor coeficiente de variación :

- [1]  $CV = 1/7 = 0'14$       [2]  $CV = 3/14 = 0'21$       [3]  $CV = 2/21 = 0'09$

El más homogéneo es el [3].



11 En un hipotético emirato de mil habitantes, con ingresos de mil pesetas mensuales todos ellos excepto el Emir, que por la explotación de sus pozos de petróleo ingresa al mes mil millones de pesetas. ¿Qué es más representativo, la media o la moda de ingresos (Renta per cápita, «moda per cápita»)? ¿Cuánto vale cada una? Razona las respuestas.



$$\text{Media} = (999 \cdot 1000 + 1 \cdot 1000\,000\,000) / 1000 = 1\,000\,999 \text{ ptas.}$$

$$\text{Moda} = 1\,000 \text{ ptas.}$$

Es claramente más representativa la moda pues, salvo el Emir, es lo que ingresan todos los habitantes, decir que el ingreso medio de ese emirato es de alrededor de un millón es una gran injusticia.



www.yoquieroaprobar.es