

EXAMEN ANÁLISIS

NOMBRE Y APELLIDOS: _____ FECHA: _____

1º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right)$

2º) Elige 3 de las integrales siguientes:

a) $\int \frac{5 \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ b) $\int (x^2 - 1) \cdot \ln x \cdot dx$ c) $\int \frac{7 \cdot dx}{8 + 25x^2}$

d) $\int \left(\frac{2 \cdot \ln x}{x} + \ln x \right) \cdot dx$ e) $\int 3 \cdot \sqrt{2x + 1} \cdot dx$

3º) a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Comprobar que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + \ln(1 + x^2)$ y de $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto.

4º) Estudia la monotonía la curvatura y los extremos de la función: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5º) Hallar los valores de los parámetros a, b y c para que la función :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + c & x \leq 0 \\ a \cdot e^x & x > 0 \end{cases}$$

Sea continua y derivable en \mathbb{R} y además, la recta tangente en $x = -2$ tenga pendiente 2.

6º) Elegir una de las dos cuestiones:

a) Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ su recta tangente en $x = 1$ y el eje de ordenadas (eje OY).

b) Calcula el área de la región limitada por las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x^2 \quad , \quad h(x) = x + 2, \quad \text{siendo } x \geq 0$$

SOLUCIONES

$$1^{\circ} \quad a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = 1^{\infty} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \cdot (\cos x - 1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} e^A = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x \cdot \tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x \tan x + x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \cdot \tan x + x} = \frac{0}{0} \Rightarrow L'H:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x)}{2 \cos x (-\sin x) \tan x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 1} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$2^{\circ} \quad a) \int \frac{5 \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \Rightarrow t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{5 \sin x \cdot \frac{-dt}{\sin x}}{1 + t^2} = -5 \int \frac{dt}{1 + t^2} = -5 \arctan t = \underline{\underline{-5 \arctan(\cos x) + C}}$$

$$b) \int (x^2 - 1) \ln x dx : u = \ln x, dv = (x^2 - 1) dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\int (x^2 - 1) \ln x dx = \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \int \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \int \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) dx$$
$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \left(\frac{x^3}{9} - x \right) + C$$

$$c) \int \frac{7 \cdot dx}{8 + 25x^2} = \int \frac{7}{8 \left(1 + \frac{25}{8} x^2 \right)} dx = \frac{7}{8} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{5}{\sqrt{8}} x \right)^2} = \underline{\underline{\frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt{8}}{5} \arctan \left(\frac{5x}{\sqrt{8}} \right) + C}}$$

$$d) I = \int \left(\frac{2 \ln x}{x} + \ln x \right) dx = \int \frac{2 \ln x}{x} dx + \int \ln x dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{2 \ln x}{x} dx: \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow dx = x dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{2t}{x} \cdot x dt = \int 2t dt = t^2 = (\ln x)^2$$

$$\int \ln x dx: u = \ln x, dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, v = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

En conclusión $I = \underline{(\ln x)^2 + x \cdot \ln x - x + C}$

$$e) \int 3 \sqrt{2x+1} dx: 2x+1 = t^2 \Rightarrow 2 dx = 2t dt \Rightarrow dx = t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int 3 \cdot t \cdot t \cdot dt = 3 \int t^2 \cdot dt = 3 \cdot \frac{t^3}{3} = t^3 = \underline{(\sqrt{2x+1})^3 + C}$$

30) a) Teoría

b) $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en un punto si $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow H(x) = f(x) - g(x) = 0$ tiene alguna solución:

$H(x)$ es continua y derivable por ser suma de funciones continuas y derivables. $H(x) = \ln(1+x^2) - 1$

$$H(0) = -1 < 0$$

$$H(2) = \ln 5 - 1 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano a la función $H(x)$ en el intervalo $[0, 2]$:

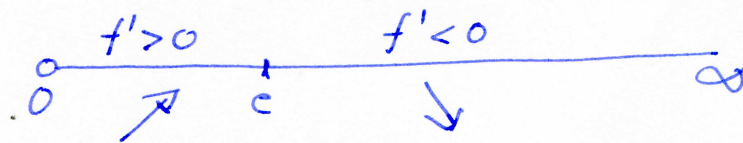
$$\exists c \in (0, 2): H(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in (0, 2): f(c) = g(c).$$

$\Leftrightarrow f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $c \in (0, 2)$.

4° Dominio $f(x): \mathbb{R}^+$ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e.$$

Signo $f'(x)$:



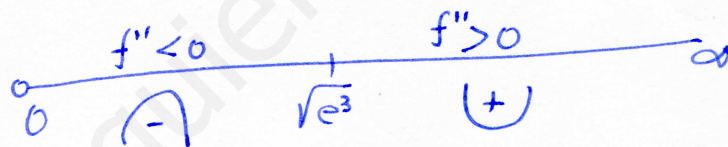
Crece $(0, e)$; decrece (e, ∞) En $x=e$ se alcanza un máximo $(e, \frac{1}{e})$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{x[-1 - 2(1 - \ln x)]}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow -3 + 2\ln x = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{3/2} = \sqrt{e^3} = e \cdot \sqrt{e}.$$

Concavidad:



Convexa : $(0, \sqrt{e^3})$ Cóncava $(\sqrt{e^3}, \infty)$ P.I en $x = \sqrt{e^3}$

5° $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + c & x \leq 0 \\ ae^x & x > 0 \end{cases}$ Para $x \neq 0$ es continua y derivable.

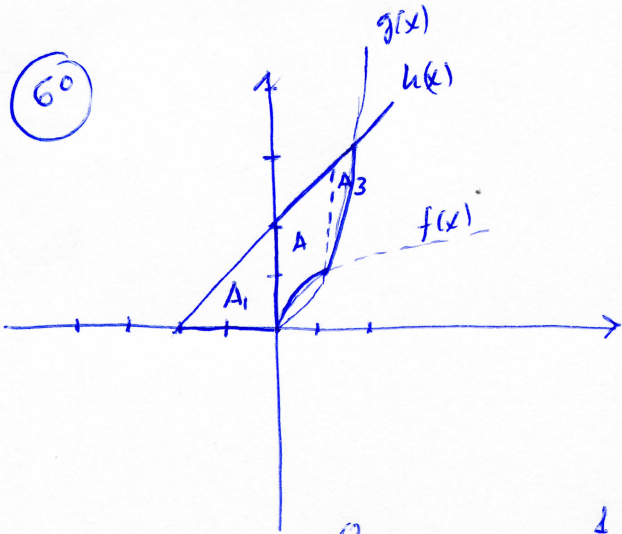
Para $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = a} \quad \text{Para este caso: } f'(0)^- = (2x - b)_{x=0} = -b$$

$$f'(0)^+ = (ae^x)_{x=0} = a \Rightarrow \boxed{-b = a}$$

Como la recta tangente en $x = -2$ debe tener pendiente 2:

$$f'(-2) = 2 \Leftrightarrow f'(-2) = (2x - b)_{x=-2} = \boxed{-4 - b = 2} \Rightarrow \boxed{b = -6, a = 6, c = 6}$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = 1$$

$$g(x) = h(x) \Rightarrow x = 2$$

$$h(x) = \text{eje } x \Rightarrow x = -2$$

$$A_{\text{total}} = \int_{-2}^0 (x+2) dx + \int_0^1 [(x+2) - \sqrt{x}] dx + \int_1^2 [(x+2) - x^2] dx =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es un triángulo}}}{2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= 2 + \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = \frac{12+11+7}{6} = \frac{30}{6} = \underline{\underline{5 \text{ m}^2}}$$