

## VECTORES

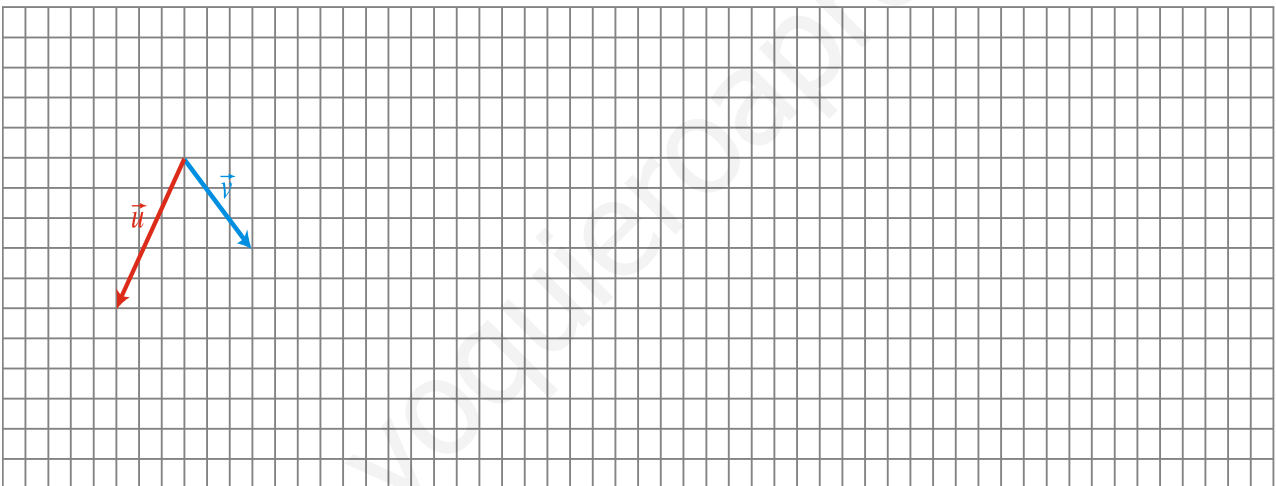
### Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. (2p)

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u} + 2\vec{v}; \quad \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}; \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$

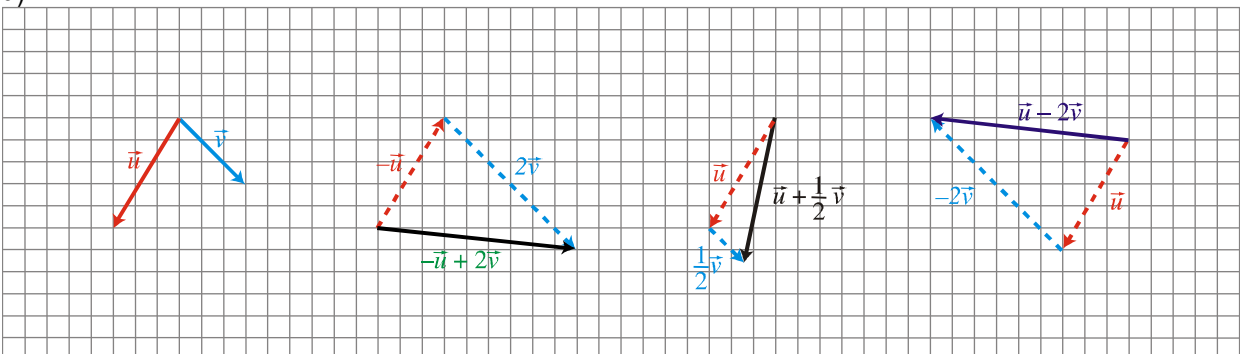


b) Dados los vectores  $\vec{a} \left( -\frac{3}{4}, 2 \right)$  y  $\vec{b} (2, -2)$ , obtén las coordenadas de:

$$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}; \quad -2\vec{a} + \vec{b}; \quad -4\vec{a} + \vec{b}$$

Solución:

a)



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} &= \left(-\frac{3}{4}, 2\right) - \frac{1}{2}(2, -2) = \left(-\frac{3}{4}, 2\right) - (1, -1) = \left(-\frac{7}{4}, 3\right) \\
 -2\vec{a} + \vec{b} &= -2\left(-\frac{3}{4}, 2\right) + (2, -2) = \left(\frac{3}{2}, -4\right) + (2, -2) = \left(\frac{7}{2}, -6\right) \\
 -4\vec{a} + \vec{b} &= -4\left(-\frac{3}{4}, 2\right) + (2, -2) = (3, -8) + (2, -2) = (5, -10)
 \end{aligned}$$

## 2. (1p)

Escriba el vector  $\vec{a}(0, 17)$  con combinación lineal de  $\vec{b}\left(\frac{1}{5}, 3\right)$  y  $\vec{c}(-1, 2)$ .

### Solución:

Tenemos que encontrar dos números,  $m$  y  $n$ , tales que:

$$\vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(0, 17) = m \cdot \left(\frac{1}{5}, 3\right) + n \cdot (-1, 2)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5}, 3m\right) + (-n, 2n)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5} - n, 3m + 2n\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{m}{5} - n \\ 17 = 3m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m - 5n \\ 17 = 3m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n = m \\ 17 = 15n + 2n \end{cases} \Rightarrow 17 = 17n \Rightarrow n = 1 \\ m = 5n = 5$$

Por tanto:

$$\vec{a} = 5 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(0, 17) = 5\left(\frac{1}{5}, 3\right) + (-1, 2)$$

## 3. (1.5p)

Dados los vectores  $\vec{u}(2, -1)$ ,  $\vec{v}\left(\frac{1}{3}, 2\right)$  y  $\vec{w}(-1, 3)$ , calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b)  $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w}$

c)  $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$

### Solución:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -1) \cdot \left(\frac{1}{3}, 2\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot 2 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

$$b) (2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w} = \left( 2(2, -1) + 3\left(\frac{1}{3}, 2\right) \right) \cdot (-1, 3) = ((4, -2) + (1, 6)) \cdot (-1, 3) = (5, 4) \cdot (-1, 3) = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = -5 + 12 = 7$$

$$c) (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{u} = ((2, -1) \cdot (-1, 3))(2, -1) = (2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3)(2, -1) = (-2 - 3)(2, -1) = -5 \cdot (2, -1) = (-10, 5)$$

#### 4. (1.5p)

Si  $\vec{x}(2, -4)$  e  $\vec{y}\left(3, \frac{5}{2}\right)$ . Calcula:

- Un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que  $\vec{x}$ .
- El ángulo formado por  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ .

#### Solución:

a) Hallamos el módulo de  $\vec{x}$ :

$$|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que  $\vec{x}$  será:

$$\left( \frac{2}{2\sqrt{5}}, \frac{-4}{2\sqrt{5}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$b) \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{(2, -4) \cdot \left(3, \frac{5}{2}\right)}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + \frac{25}{4}}} = \frac{6 - 10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{61}{4}}} = \frac{-4}{2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{61}}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{305}} \approx -0,23$$

$$\text{Luego } (\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \approx 103,24^\circ.$$

#### 5. Sabiendo que: $|\vec{u}| = 4$ , $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u} \wedge \vec{v} = 150^\circ$ , calcula: (1.5p)

- $\vec{u} \cdot (2\vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (-3\vec{v})$
- $(-\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$

Nota: Para ver el ángulo que forman los vectores, ayúdate de un dibujo, utilizando el papel cuadriculado que se te ha proporcionado.

#### 6. Obten dos vectores perpendiculares unitarios para cada uno de los siguientes vectores: (1p)

$$\vec{a} = (-3, -1) \quad \vec{b} = (0, -3)$$

#### 7. Dadas las siguientes parejas de vectores,

- $\vec{a} = (3, 0)$  y  $\vec{b} = (0, -2)$
- $\vec{a} = (5, 3)$  y  $\vec{b} = (-5, -3)$

- Calcula el ángulo que forman los vectores de cada pareja. (1p)
- ¿Observas alguna relación especial en cada una de las parejas? ¿Cuál? Razona tu respuesta. (0.5p)

