4. SEMEJANZA

1 **Con un cable de 50 metros se quiere conseguir un polígono semejante a otro de 90 metros de perímetro. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 5 metros?**

Solución:
La razón de los perímetros de dos polígonos es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{P}{P'}=\frac{50}{90}=\frac{a}{5}\Rightarrow a=\frac{5\cdot 50}{90}=\frac{250}{90}=2{,}77\ \text{m}$$

2 **Las áreas de dos polígonos semejantes están en la razón 1:64. ¿Cuál es la razón de semejanza?**

Solución:
Todo polígono se puede descomponer en triángulos P, Q, R..., para los cuales se cumple:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot a'\cdot h'}=\frac{a\cdot h}{\cdot a\cdot h'}=r^2\Rightarrow\frac{P}{P'}=r^2;\frac{Q}{Q'}=r^2;\frac{R}{R'}=r^2$$

$$\Rightarrow P=r^2\cdot P';Q=r^2\cdot Q';R=r^2\cdot R'\Rightarrow P+Q+R=r^2\cdot(P'+Q'+R')$$

$$\Rightarrow S=r^2\cdot S'\Rightarrow\frac{S}{S'}=r^2\Rightarrow\frac{1}{64}=r^2\Rightarrow r=\frac{1}{8}$$

3 **Se quiere dibujar un polígono de perímetro 60 cm, semejante a otro de perímetro 180 cm. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 15 metros?**

Solución:
La razón de los perímetros de dos polígonos es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{P}{P'}=\frac{60}{180}=\frac{a}{15}\Rightarrow a=\frac{15\cdot 60}{180}=\frac{900}{180}=5\ \text{cm}$$

4 **Los lados de un cuadrilátero son: a=1 cm, b=6 cm, c=7 cm y d=4 cm. Se sabe que el área de otro semejante es 16 veces mayor que el área del primero. Determina la medida de los lados del cuadrilátero semejante.**

Solución:

$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{a}{a'}\right)^2=16\Rightarrow r=\frac{a}{a'}=4$$

Por tanto:

$$a'=4\cdot a=4\cdot 1=4\ \text{cm}$$
$$b'=4\cdot b=4\cdot 6=24\ \text{cm}$$
$$c'=4\cdot c=4\cdot 7=28\ \text{cm}$$
$$d'=4\cdot d=4\cdot 4=16\ \text{cm}$$

5 **Dado un prisma rectangular de 5 cm de altura y lados de la base 3 y 4 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 0,5. Calcula el volumen del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del volumen del prisma y utilizando la razón de semejanza entre volúmenes.**

Solución:
1. Las medidas del segundo prisma son:
Altura = 5 · 0,5 = 2,5 cm.
Lado base = 3 · 0,5 = 1,5 cm.
Lado base = 4 · 0,5 = 2 cm.
Volumen del segundo prisma = 2,5 · 1,5 · 2 = 7,5 cm^3.

2. La razón de semejanza entre volúmenes es $0{,}5^3 = 0{,}125$, y el volumen del primer prisma es 5 · 3 · 4 = 60 cm^3, por lo que el volumen del segundo prisma es 60 · 0,125 = 7,5 cm^3.

6 **Dos ciudades situadas a 63 km están representadas en un mapa a una distancia de 4 cm. ¿A qué distancia se encontrarán dos ciudades que distan 233 km?**

Solución:
Primero calculamos la escala del mapa pasando , previamente, los km a cm:

$$\frac{6.300.000}{4} = 1.575.000 \Rightarrow \text{Escala } 1:1.575.000$$

Luego si dos puntos distan233 km, en el mapa se representan a:

$$\frac{23.300.000}{1.575.000} = 14{,}8 \text{ cm}$$

7 **Dado un trapecio isósceles de 4 cm de altura y bases 8 y 6 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 1,5. Calcula la superficie del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del área del trapecio y utilizando la razón de semejanza entre áreas.**

Solución:
1. Las medidas del segundo trapecio son:
Altura = 4 · 1,5 = 6 cm.
Base mayor = 8 · 1,5 = 12 cm.
Base menor = 6 · 1,5 = 9 cm.
Área del segundo trapecio = $\frac{12+9}{2} \cdot 6 = 63 \text{ cm}^2$.

2. La razón de semejanza entre áreas es $1{,}5^2 = 2{,}25$, y el área del primer trapecio es $\frac{8+6}{2} \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$, por lo que el área del segundo trapecio es $28 \cdot 2{,}25 = 62 \text{ cm}^2$.

8 **En el plano de una vivienda, a escala 1:350, las medidas del jardín son 36 mm y 29 mm. ¿Cuál es la superficie real de la terraza?**

Solución:
Las medidas del jardín son:

$$36 \cdot 350 = 12600 \text{ mm} = 12{,}6 \text{ m}$$

$$29 \cdot 350 = 10150 \text{ mm} = 10{,}15 \text{ m}$$

$$S = 12{,}6 \cdot 10{,}15 = 127 \text{ m}^2$$

1 **La sombra de una torre eléctrica mide 10 m y en el mismo instante, la sombra de un joven mide 1,5 m. Si el joven tiene una altura de 1,8 m, ¿cuál es la altura de la torre?**

Solución:
Los triángulos formados por la torre y su sombra y por el joven y su sombra son semejantes, pues los rayos de sol son paralelos.
Por tanto, si x es la altura de la torre, $\frac{1{,}8}{1{,}5} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 12 \text{ m}$.

2 **Se consideran dos triángulos semejantes. Del primero conocemos un ángulo, 35º, y del segundo sabemos que uno de sus ángulo es 55º. Con estos datos, ¿qué podemos averiguar de los triángulos?**

Solución:
Como los ángulos de dos triángulos semejantes deben ser iguales, ambos triángulos tienen un ángulo de 35º y otro de 55º, por lo

que el tercero debe ser de 90º. Por tanto, los triángulos son rectángulos.

3 **La base de un triángulo mide el doble que la de otro triángulo, y su altura también. ¿Podemos afirmar siempre que son triángulos semejantes?**

Solución:
No, puede que no sean semejantes. Por ejemplo, el primero puede ser un triángulo rectángulo de base un cateto de 10 cm y altura el otro cateto de 15 cm, y el segundo triángulo puede ser isósceles de base 20 cm y altura 30 cm.

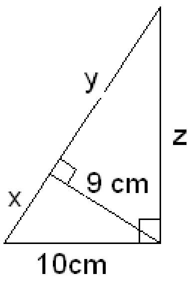
4 **Si dos triángulos rectángulos son semejantes y las hipotenusas miden, respectivamente, 26 y 39 cm, y el menor de los catetos del primer triángulo mide 10 cm, ¿cuánto miden los otros lados en ambos triángulos?**

Solución:
Por el teorema de Pitágoras, si x es el cateto mayor del primer triángulo: $x^2+10^2=26^2 \Rightarrow x=24\text{ cm}$.

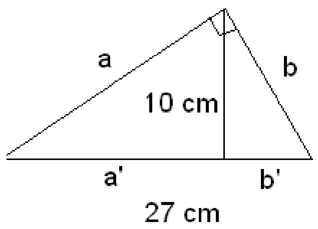
Por otro lado, si a y b son los catetos del segundo triángulo: $\frac{a}{10}=\frac{b}{24}=\frac{39}{26} \Rightarrow a=15\text{ cm}$ y $b=36\text{ cm}$.

5 **Encuentra los lados desconocidos:**

a)



b)



Solución:

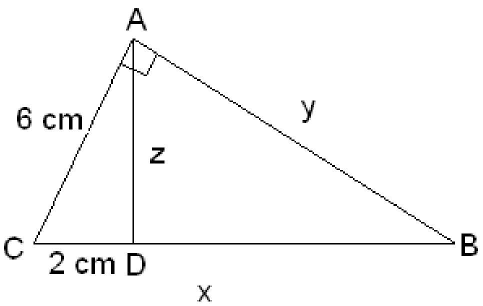
a) Por el teorema de Pitágoras: $x^2+9^2=10^2 \Rightarrow x=\sqrt{19}\approx 4{,}36\text{ cm}$.
Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:
$\frac{4{,}36}{9}=\frac{10}{z} \Rightarrow z=\frac{90}{4{,}36}=20{,}64\text{ cm}$ y $\frac{y}{9}=\frac{9}{4{,}36} \Rightarrow y=\frac{36}{4{,}36}=8{,}26\text{ cm}$.

b) Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:
$\frac{a'}{10}=\frac{10}{b'} \Rightarrow a'b'=100$, pero como b' = 27 - a', entonces a' (27 - a') = 100. Resolviendo, $a'\approx 4{,}43\text{ cm},\ b'\approx 22{,}57\text{ cm}$ o viceversa.

Por otro lado, $\frac{a}{4{,}43}=\frac{27}{a} \Rightarrow a=10{,}94\text{ cm}$ y $\frac{b}{22{,}57}=\frac{27}{b} \Rightarrow b=24{,}69\text{ cm}$.

6 **Un cateto de un triángulo rectángulo mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 2 cm. Determinar los otros dos lados y la altura sobre la hipotenusa.**

Solución:

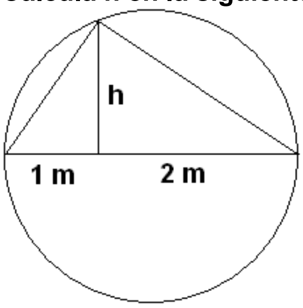


Por el teorema de Pitágoras: $z^2+2^2=6^2 \Rightarrow z=\sqrt{32}\approx 5{,}66\,\text{cm}$.

Los triángulos ABC y ACD son semejantes, pues comparten un ángulo y ambos tienen además un ángulo recto.

Entonces: $\frac{6}{2}=\frac{x}{6} \Rightarrow x=18\,\text{cm}$ y $\frac{2}{5{,}66}=\frac{y}{6} \Rightarrow y=2{,}12\,\text{cm}$.

7 **Calcula h en la siguiente figura:**

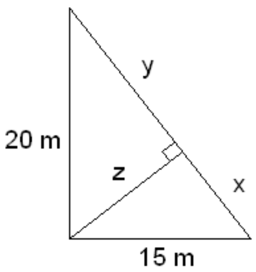


Solución:

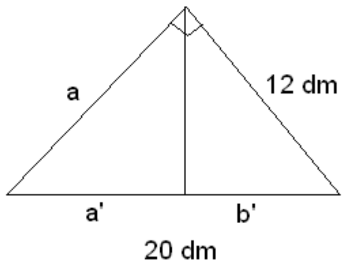
Como la base del triángulo es un diámetro de la circunferencia circunscrita, el triángulo es rectángulo, y por tanto, los dos triángulos en los que queda dividido son semejantes entre sí. Por tanto, $\frac{1}{h}=\frac{h}{2} \Rightarrow h=\sqrt{2}\approx 1{,}41\,\text{m}$.

8 **Encuentra los lados desconocidos:**

a)



b)



Solución:

a) Por el teorema de Pitágoras: $(x+y)^2=15^2+20^2 \Rightarrow x+y=25\,\text{m}$.

Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:

$\frac{20}{z}=\frac{25}{15} \Rightarrow z=12\,\text{m}$, $\frac{20}{12}=\frac{15}{x} \Rightarrow x=9\,\text{m}$ y por último y = 25 - 9 = 16 m.

b) Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:

$\frac{20}{12}=\frac{12}{b'} \Rightarrow b'=7{,}2\,\text{dm}$ y por tanto, a' = 20 - 7,2 = 12,8 dm. Además $\frac{12{,}8}{a}=\frac{a}{20} \Rightarrow a=16\,\text{dm}$.