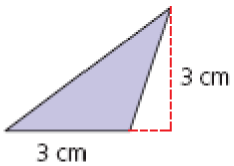
# Unidad 8 – Semejanzas y triángulos

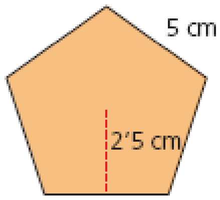
## PÁGINA 138

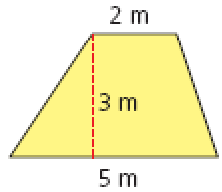
### ¿QUÉ NECESITAS SABER?

**Área de un polígono**

Calcula el área de los siguientes polígonos:

a) 

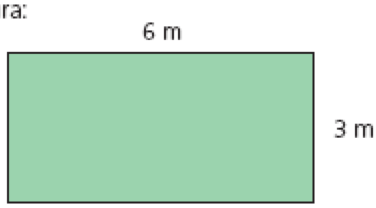

b) 


c) 


**Volumen de un poliedro**

Calcula el volumen de una pirámide de 8 m de altura y cuya base es un cuadrado de 3 m de lado.

Calcula el volumen de un paralelepípedo de 7 m de altura y cuya base es el rectángulo que se muestra en la figura:




SOLUCIONES

**Área de un polígono.**

a) $\text{Área}_{\text{triángulo}} = \dfrac{bh}{2} \rightarrow A_t = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = \dfrac{9}{2} = 4'5 \text{ cm}^2$

b) $\text{Área}_{\text{polígono regular}} = \dfrac{pa}{2} \rightarrow A_p = \dfrac{25 \cdot 2'5}{2} = 31'25 \text{ cm}^2$

c) $\text{Área}_{\text{trapecio}} = \dfrac{(B+b)h}{2} \rightarrow A_{trp} = \dfrac{(5+2) \cdot 3}{2} = 10'5 \text{ cm}^2$

**Volumen de un poliedro.**

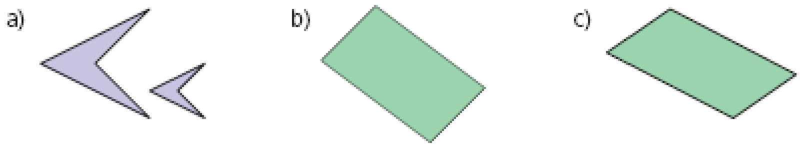
$\text{Volumen}_{\text{pirámide}} = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{3^2 \cdot 8}{3} = 24 \text{ cm}^3$

$\text{Volumen}_{\text{paralelepípedo}} = A_{base} \cdot h = 6 \cdot 3 \cdot 7 = 126 \text{ cm}^3$

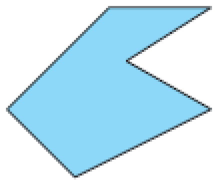
## PÁGINA 140

### ACTIVIDADES

**1.** Indica si las siguientes figuras son semejantes razonando tu respuesta:



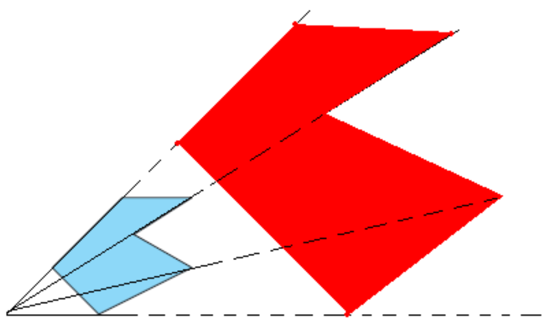

**2.** Copia la siguiente figura en tu cuaderno y construye una figura semejante:



SOLUCIONES

**1.** Las dos figuras que aparecen en el apartado a) son semejantes puesto que ambas tienen la misma forma pero diferentes tamaños. Sin embargo, la figura del apartado b), un rectángulo, no tiene la misma forma que el romboide del apartado c).

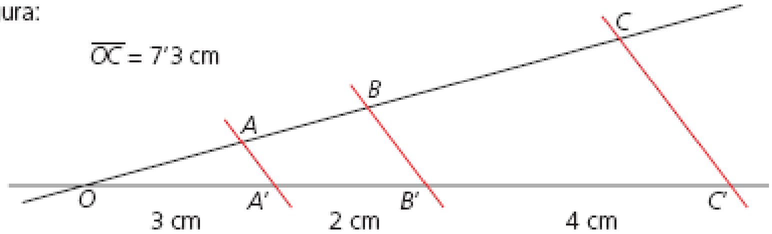
**2.**



## PÁGINA 141

**ACTIVIDADES**

**3.** Utiliza el teorema de Tales para calcular la medida de los segmentos de la siguiente figura:




SOLUCIONES

**3.** Según el teorema de Tales sabemos que:

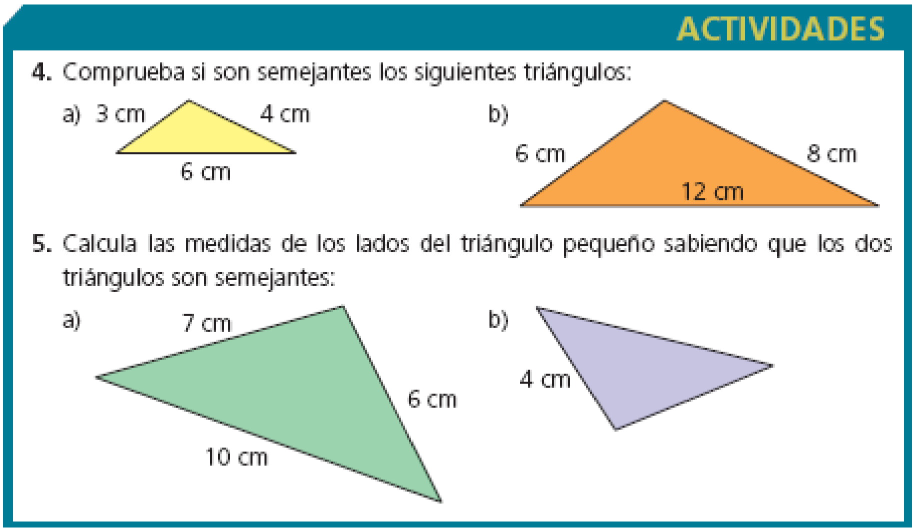
$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'}$$

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'}\rightarrow\frac{OA}{3}=\frac{7'3}{9}\rightarrow\boxed{OA=2'43\text{ cm}}$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OC}{OC'}\rightarrow\frac{AB}{2}=\frac{7'3}{9}\rightarrow\boxed{AB=1'62\text{ cm}}$$

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'}\rightarrow\frac{BC}{4}=\frac{7'3}{9}\rightarrow\boxed{BC=3'24\text{ cm}}$$

## PÁGINA 142




SOLUCIONES

**4.** Por el primer criterio de semejanza sabemos que dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales. Así:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Ambos triángulos son semejantes.

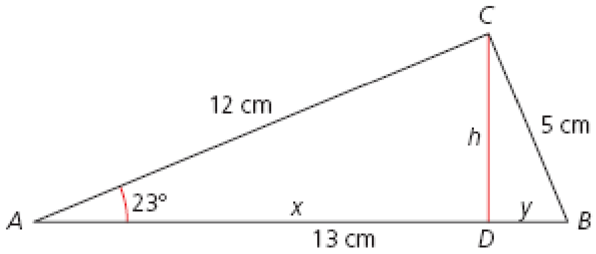
**5.** Si ambos triángulos son semejantes, la proporción entre sus lados se debe mantener. El lado de 4 cm se corresponde con el de 6cm, luego su razón de semejanza es 2/3. Según eso, el resto de sus lados deben medir:

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = \frac{14}{3} = 4'67 \text{ cm}$$
$$\frac{4}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{20}{3} = 6'67 \text{ cm}$$

Los otros dos lados del triángulo miden 4’67 cm y 6’67 cm.

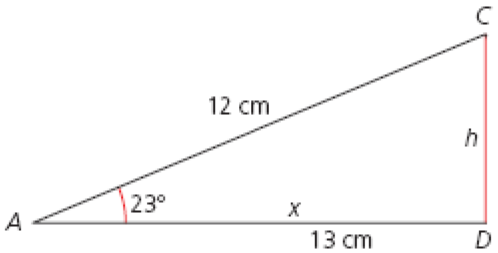
## ACTIVIDADES

**6.** Calcula las incógnitas marcadas en el siguiente triángulo rectángulo y todos los ángulos de los triángulos semejantes de la figura:




SOLUCIONES

**6.** Podemos dividir el triángulo de la figura en dos triángulos rectángulos, y sabemos que dos triángulos rectángulos son semejantes si tiene un lado agudo igual. Por lo tanto,




La suma de los ángulos de un triángulo alcanza los 180 grados, entonces, el ángulo C del primer triángulo mide 180 – 90 – 23 = 67º.
Los ángulos del segundo triángulo miden exactamente: 23º, 67º y 90º.

Por otra parte, si ambos triángulos son semejantes, podemos establecer la siguiente relación entre sus lados:

$$\frac{12}{5}=\frac{x}{h}=\frac{h}{y}\rightarrow\frac{12}{5}=\frac{x}{h}=\frac{h}{13-x}$$

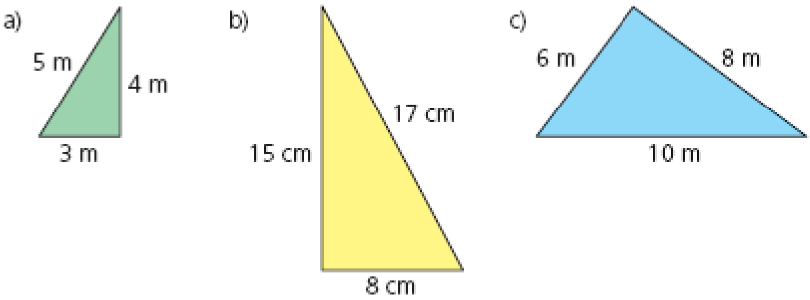
$$\left.\begin{array}{l}12h=5x\\156-12x=5h\end{array}\right\}\Rightarrow 156-12\left(\frac{12h}{5}\right)=5h\rightarrow 156=\frac{169h}{5}$$

$$\boxed{h=4'62\text{ cm}}\Rightarrow\boxed{x=11'08\text{ cm}}\Rightarrow\boxed{y=1'92\text{ cm}}$$

## PÁGINA 144

**ACTIVIDADES**

**7.** Determina la altura sobre la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos:




SOLUCIONES

**7.**

a) Por el teorema de la altura sabemos que: $h^2 = (5-x)\cdot x,$ donde $x$ es la proyección del cateto de 3 metros sobre la hipotenusa.

Por el teorema del cateto, podemos asegurar que $16 = 5x$.

Por tanto, $x = \dfrac{16}{5} = 3'2$ metros.

Entonces, $h = 2'4$ metros.

b) Por el teorema de la altura sabemos que: $h^2 = (17-x)\cdot x,$ donde $x$ es la proyección del cateto de 8 metros sobre la hipotenusa.

Por el teorema del cateto, podemos asegurar que $64 = 17x$.

Por tanto, $x = 3'76$ metros.

Entonces, $h = 7'06$ metros.

c) Por el teorema de la altura sabemos que: $h^2 = (10-x)\cdot x,$ donde $x$ es la proyección del cateto de 6 metros sobre la hipotenusa.

Por el teorema del cateto, podemos asegurar que $36 = 10x$.

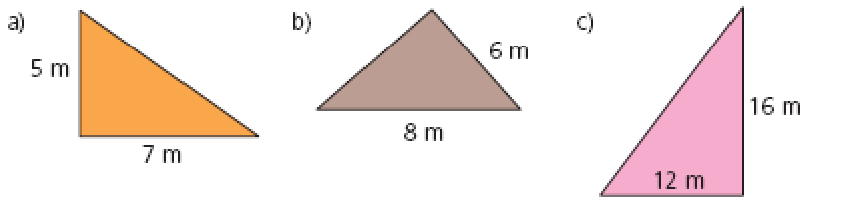
Por tanto, $x = 3'6$ metros.

Entonces, $h = \sqrt{23'04} = 4'8$ metros.

## PÁGINA 145

**ACTIVIDADES**

**8.** Calcula el lado que falta y la altura sobre la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos:




SOLUCIONES

**8.** El teorema de Pitágoras nos dice que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa coincide con la suma de los cuadrados de los catetos.

a) $H^2 = C^2 + c^2$

$H^2 = 7^2 + 5^2 \rightarrow H^2 = 74 \rightarrow H = 8'6$ metros.

Aplicando el teorema de la altura tenemos que: $\mathrm{h}^2 = (8'6 - x)\cdot x,$ donde $x$ es la proyección del cateto de 5 metros sobre la hipotenusa.

Por el teorema del cateto, podemos asegurar que $25 = 8'6x$.

Por tanto, $x = 2'91$ metros.

Entonces, $h = \sqrt{16'55} = 4'07$ metros.

b) $H^2 = C^2 + c^2$

$8^2 = C^2 + 6^2 \rightarrow 64 - 36 = C^2 \rightarrow C = 5'29$ metros.

Aplicando el teorema de la altura tenemos que: $\mathrm{h}^2 = (8 - x)\cdot x,$ donde $x$ es la proyección del cateto de 6 metros sobre la hipotenusa.

Por el teorema del cateto, podemos asegurar que $36 = 8x$.

Por tanto, $x = 4'5$ metros.

Entonces, $h = \sqrt{15'75} = 3'97$ metros.

c) $H^2 = C^2 + c^2$

$H^2 = 16^2 + 12^2 \rightarrow H^2 = 400 \rightarrow H = 20$ metros.

Aplicando el teorema de la altura tenemos que: $\mathrm{h}^2 = (20 - x)\cdot x,$ donde $x$ es la proyección del cateto de 12 metros sobre la hipotenusa.

Por el teorema del cateto, podemos asegurar que $144 = 20x$.

Por tanto, $x = 7'2$ metros.

Entonces, $h = \sqrt{92'16} = 9'6$ metros.

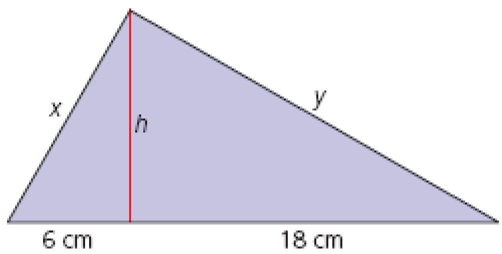
**ACTIVIDADES**

**9.** Calcula el área de un trapecio isósceles cuya base menor mide 4 cm, su base mayor 20 cm y su lado 10 cm.

**10.** Antonio mide 1'70 m y su sombra en este preciso momento mide 3'4 m. Si la sombra de un árbol que está junto a él mide 10 m, ¿qué altura tiene el árbol?

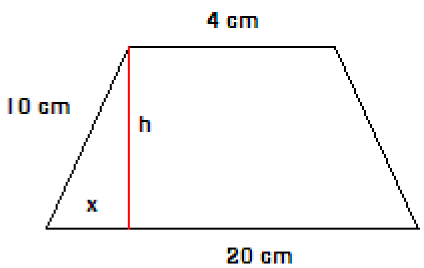
**11.** Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 10 y 24 cm.

**12.** Calcula los catetos y la altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo:




SOLUCIONES

**9.**




El área de un trapecio viene dada por: $\mathrm{A}_{\mathrm{trp}} = \dfrac{(B+b)h}{2} = \dfrac{(20+4)h}{2} = 12h$

Para calcular $h$ consideramos el triángulo formado por el h, el lado del triángulo y su proyección sobre la base del trapecio, de modo que obtenemos un triángulo rectángulo de catetos $h$, $x$ e hipotenusa 10 cm.

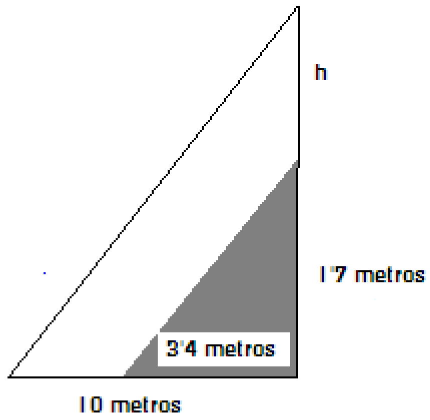
Aplicamos Pitágoras sobre ese triángulo y obtenemos la altura:

$H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow 100 = h^2 + x^2$

Como nuestro trapecio es isósceles, podemos calcular $x = \dfrac{20-4}{2} = 8$ cm.

Así, $h = 6$ cm, y el área del trapecio es $\boxed{\mathrm{A}_{\mathrm{trp}} = 72 \text{ cm}^2}$.

**10.**
En este caso, estamos trabajando con dos triángulos semejantes, y por el primer criterio de semejaza sabemos que sus lados deben ser proporcionales, entonces:




$$\frac{10}{3'4} = \frac{h}{1'7} \Rightarrow \boxed{h = 5 \text{ m}}$$

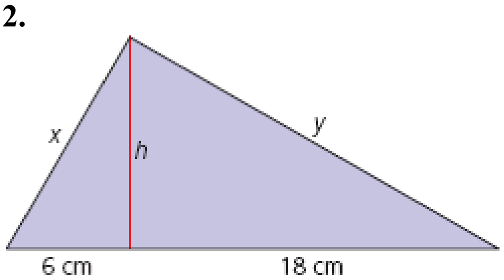
La altura del árbol asciende a 5 metros.

**11.**
Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre uno de los triángulos que obtenemos al trazar las diagonales del rombo, de catetos 5 y 12 cm.

$H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow l^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow l = 13$ cm.

De este modo, obtenemos que el lado del rombo mide 13 cm.

**12.**

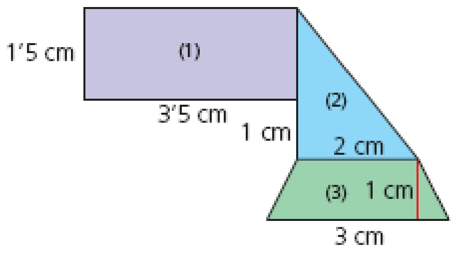



Aplicamos el teorema del cateto sobre el triángulo grande: $x^2 = 24 \cdot 6 = 144 \rightarrow x = 12$.
Por otra parte aplicamos el Teorema de Pitágoras sobre ese mismo triángulo: $x^2 + y^2 = 24^2$, de donde obtenemos que $y = 20'78$ cm.
Volvemos a aplicar Pitágoras sobre el triángulo de la derecha y obtenemos el valor de la altura: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10'39$ cm.

## PÁGINA 147

**ACTIVIDADES**

**13.** Calcula el área real de cada habitación si el plano está a escala 1:20:




SOLUCIONES

**13.**

$$\text{Área(1): } A_r = b\cdot h = 3'5\cdot 1'5 = 5'25 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Área real (1): } 5'25\cdot 20 = 105 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área(2): } A_{tr} = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{2\cdot 2'5}{2} = 2'5 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Área real (2): } 2'5\cdot 20 = 50 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área(3): } A_{trp} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(3+2)\cdot 1}{2} = 2'5 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Área real (3): } 2'5\cdot 20 = 50 \text{ cm}^2$$

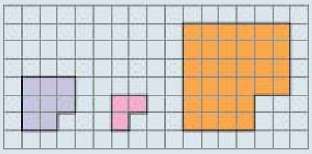
# ACTIVIDADES FINALES

## → EJERCICIOS

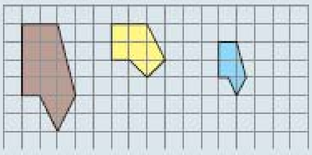
### Concepto de semejanza

□ **14.** Indica cuáles de estas figuras son semejantes y calcula su razón de semejanza:

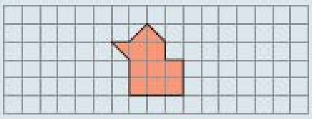
a)



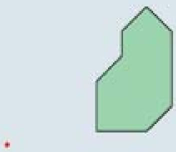
b)



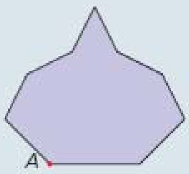
□ **15.** Copia la figura en una hoja cuadriculada y dibuja una figura semejante a ella cuya razón de semejanza sea 3:



□ **16.** Dada la siguiente figura, construye otra semejante utilizando el punto marcado como punto de proyección:



□ **17.** Dada la siguiente figura, construye otra semejante cuya razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$, utilizando el vértice *A* como punto para la proyección:




◪ **18.** Dado un triángulo cuyos lados miden 3'9, 2'7 y 4 m, calcula las medidas que tendrá un triángulo a escala 2:15.

◪ **19.** ¿Todos los cuadrados son semejantes? Razona tu respuesta.

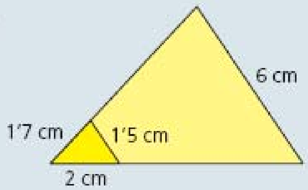
◪ **20.** ¿Todos los rectángulos son semejantes? Razona tu respuesta.

◪ **21.** ¿Todos los hexágonos regulares son semejantes? Razona tu respuesta.

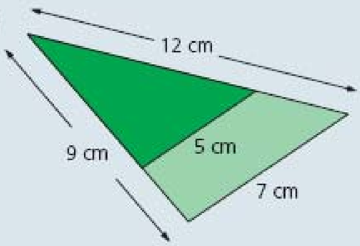
### El teorema de Tales. Semejanza de triángulos

□ **22.** Dados los siguientes triángulos en forma de Tales, calcula sus lados:

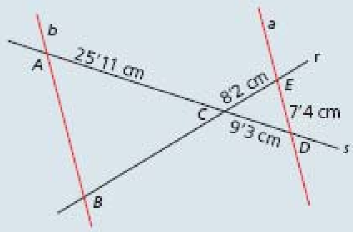
a)




b)



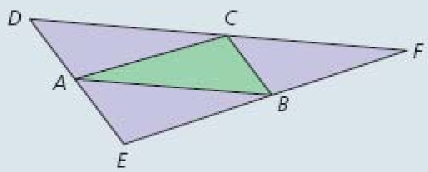

◪ **23.** Sabiendo que las rectas *a* y *b* son paralelas, razona si los triángulos *ABC* y *CDE* son semejantes. Calcula, a continuación, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$:




□ **24.** Si trazamos la diagonal de un paralelogramo, ¿los triángulos que se obtienen son semejantes?

□ **25.** Dado un triángulo cuyos lados miden 3'2, 2'7 y 4'8 cm, calcula las medidas de un triángulo semejante a él cuya razón de semejanza sea 3'4.

■ **26.** ¿Son semejantes los triángulos *ABC* y *DEF* de la figura? Razona tu respuesta.

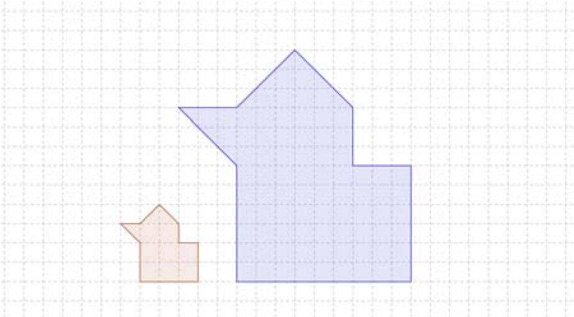


SOLUCIONES

**Concepto de semejanza.**

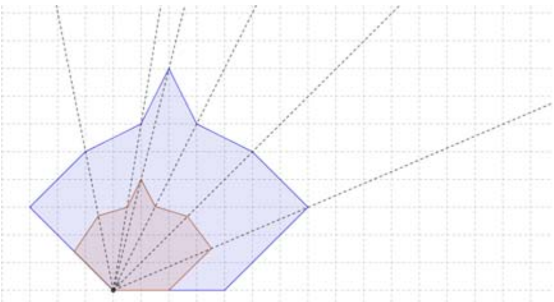
**14.**
a) Las tres figuras son semejantes con razón de semejanza 2.
b) La primera figura y la tercer con semejantes entre sí, pero no con la segunda.

**15.**



**16.**

**17.**



**18.**
Si la razón es 2:15, podemos establecer tres reglas de tres simples tales que:

$$\left.\begin{array}{l}2 \rightarrow 15 \\ 3'9 \rightarrow x\end{array}\right\} \Rightarrow x = 29'25 \text{ m.} \quad \left.\begin{array}{l}2 \rightarrow 15 \\ 2'7 \rightarrow y\end{array}\right\} \Rightarrow y = 20'25 \text{ m.} \quad \left.\begin{array}{l}2 \rightarrow 15 \\ 4 \rightarrow z\end{array}\right\} \Rightarrow z = 30 \text{ m.}$$

Las medidas del triángulo qe buscamos respecto a las medidas que tenemos son:
29'25 m, 20'25 m y 30 m.

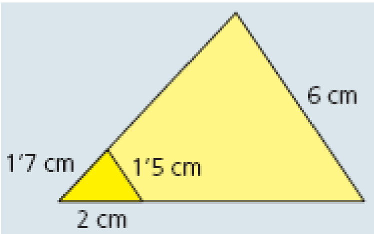
**19.** Si aseguramos que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y tamaño diferente, entonces todos los cuadrados son semejantes.

**20**. Los lados de dos rectángulos no tiene porqué estar en la misma proporción, luego no tienen por qué hacer semejantes a todos los rectángulos.

**21.** Si son regulares, entonces todos sus lados son iguales, y por lo tanto, dados dos hexágonos regulares, todos sus lados mantienen la misma proporción, luego son semejantes.

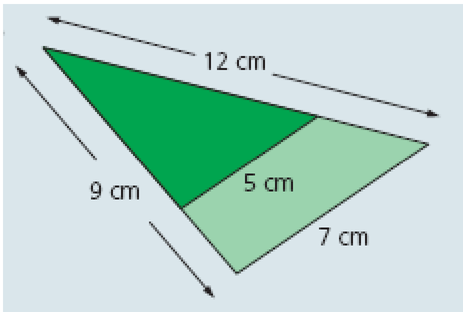
**El teorema de Tales. Semejanza de triángulos.**

**22.**
a) Si los triángulos están en posición de Tales, entonces, podemos asegurar que se mantiene la proporción entre todos sus lados, es decir:




$$\frac{6}{1'5}=\frac{x}{1'7}\Rightarrow x=6'8 \text{ cm}$$
$$\frac{6}{1'5}=\frac{y}{2}\Rightarrow y=8 \text{ cm}$$

b)




$$\frac{7}{5}=\frac{12}{x}\Rightarrow x=8'57 \text{ cm}$$
$$\frac{7}{5}=\frac{9}{y}\Rightarrow y=6'43 \text{ cm}$$

**23.**
Ambos triángulos tiene dos lados que pertenecen a la misma recta y los otros dos lados son paralelos, luego, son semejantes.
Para calcular AB y BC aplicamos el teorema de Tales.

$$\frac{25'11}{9'3}=\frac{8'2}{BC}\Rightarrow BC=3'04 \text{ cm.}$$
$$\frac{25'11}{9'3}=\frac{AB}{7'4}\Rightarrow AB=19'98 \text{ cm.}$$

**24.**
Al trazar la diagonal construimos dos triángulos con dos lados paralelos y uno común, luego son semejantes.

**25.**
Si la razón de semejanza de los dos triángulos es 3’4, los lados del segundo triángulo serían:

Lado 1: $3'2 \cdot 3'4 = 10'88$ cm.

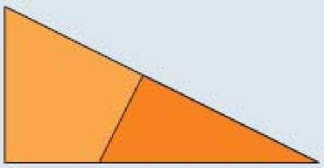
Lado 2: $2'7 \cdot 3'4 = 9'18$ cm.

Lado 3: $4'8 \cdot 3'4 = 16'32$ cm.

**26.**
El triángulo ABC tiene los vértices en la mitad de los lados del triángulo DEF, luego son semejantes de razón  .

## PÁGINA 151

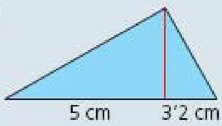
□ **27.** Los siguientes triángulos rectángulos, ¿son semejantes? Razona tu respuesta.



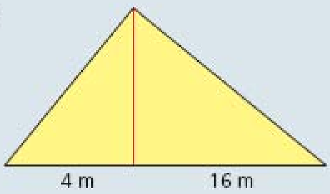
### Teoremas del cateto y de la altura

□ **28.** Calcula la altura sobre la hipotenusa y los catetos de los siguientes triángulos rectángulos:

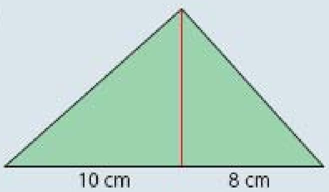
a)




b)

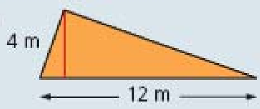



c)

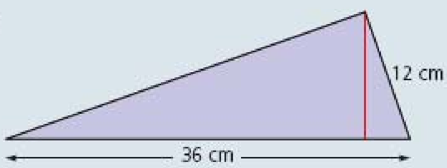



◪ **29.** Calcula la altura sobre la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos:

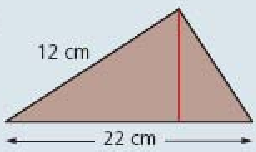
a)




b)

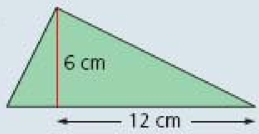



c)

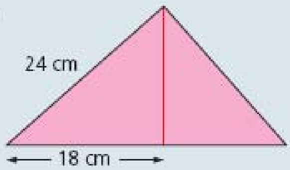



◪ **30.** Calcula el perímetro de estos triángulos rectángulos:

a)



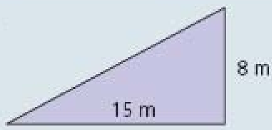

b)




### Teorema de Pitágoras

□ **31.** Calcula el lado que falta en estos triángulos rectángulos:

a)

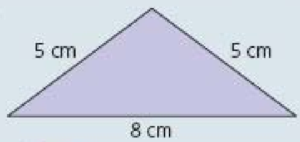



b)

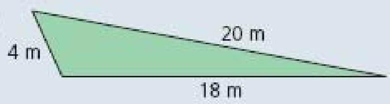

□ **32.** Calcula la altura de un triángulo equilátero de 5 cm de lado.

◪ **33.** Calcula la altura de los siguientes triángulos:

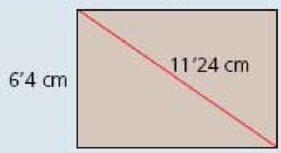
a)




b)




□ **34.** Calcula el perímetro del rectángulo de la figura:




□ **35.** Calcula el área de un cuadrado de 7 m de diagonal.

◪ **36.** Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 10 y 24 cm.

◪ **37.** Calcula el área de un hexágono regular de 8 cm de lado. →

**27.**
Los dos triángulos son rectángulos y además tienen un ángulo común, luego el otro ángulo también es igual. Como tienen los tres lados iguales son triángulos semejantes.

**Teorema del cateto y de la altura.**

**28.**

a)
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 5 \cdot 3'2 = 16 \rightarrow h = 4$ cm.
Por el teorema del cateto:
$\text{C}^2 = H \cdot P = 8'2 \cdot 5 = 41 \rightarrow C = 6'4$ cm.
$\text{c}^2 = H \cdot p = 8'2 \cdot 3'2 = 26'24 \rightarrow c = 5'12$ cm.
Observación: P y p son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa H.

b)
Por el teorema del cateto:
$\text{C}^2 = H \cdot P \rightarrow 24^2 = H \cdot 18 \rightarrow H = 32$ cm.
$\text{c}^2 = H \cdot p \rightarrow c^2 = 32 \cdot (32-18) \rightarrow c = 21'17$ cm.
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 18 \cdot 14 = 252 \rightarrow h = 15'87$ cm.

c)
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 10 \cdot 8 = 80 \rightarrow h = 1'9$ cm.
Por el teorema del cateto:
$\text{C}^2 = H \cdot P = 18 \cdot 10 = 181 \rightarrow C = 13'45$ cm.
$\text{c}^2 = H \cdot p = 18 \cdot 8 = 144 \rightarrow c = 12$ cm.

**29.**
a)
Por el teorema del cateto:
$\text{C}^2 = H \cdot P \rightarrow 4^2 = 12 \cdot P \rightarrow P = 1'33$ cm.
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 1'33 \cdot 10'67 = 14'22 \rightarrow h = 3'77$ cm.

b)
Por el teorema del cateto:
$\text{C}^2 = H \cdot P \rightarrow 12^2 = 36 \cdot P \rightarrow P = 4$ cm.
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 32 \cdot 4 = 128 \rightarrow h = 11'31$ cm.

c)

Por el teorema del cateto:

$C^2 = H \cdot P \to 12^2 = 22 \cdot P \to P = 6'55$ cm.

Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 15'45 \cdot 6'55 = 101'23 \to h = 10'06$ cm.

**30.**

a)

Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n \to 36 = 12 \cdot n \to n = 3$ cm.

Por el teorema del cateto:

$C^2 = H \cdot P = 15 \cdot 12 = 180 \to C = 13'42$ cm.

$c^2 = H \cdot p = 15 \cdot 3 = 45 \to c = 6'71$ cm.

Perímetro: $C + c + H = 13'42 + 6'71 + 15 = 35'13$ cm.

b)

Por el teorema del cateto:

$C^2 = H \cdot P \to 24^2 = H \cdot 18 \to H = 32$ cm.

$c^2 = H \cdot p = 32 \cdot (32 - 18) = 448 \to c = 21'17$ cm.

Perímetro: $C + c + H = 24 + 21'17 + 32 = 77'17$ cm.

**Teorema de Pitágoras.**

**31.**

a) $H^2 = C^2 + c^2 \to H^2 = 15^2 + 8^2 \to H = 17$ cm.

b) $H^2 = C^2 + c^2 \to 26^2 = 10^2 + c^2 \to c = 24$ cm.

**32.**

Si el triángulo es equilátero, la altura caerá sobre la mitad del lado, formándose un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 y catetos 2'5 cm y h, donde h es la altura del triángulo inicial. Por lo tanto, aplicando Pitágoras sobre dicho triángulo tenemos:

$H^2 = C^2 + c^2 \to 5^2 = 2'5^2 + h^2 \to h = 4'33$ cm.

La altura de nuestro triángulo es 4'33 cm.

**33.**

a) Como el triángulo que tenemos es un triángulo isósceles, la altura divide a la base en dos partes iguales, luego aplicamos Pitágoras sobre un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 cm y catetos 4 cm y la altura buscada.

$H^2 = C^2 + c^2 \to 5^2 = 4^2 + h^2 \to h = 3$ cm.

b) Planteamos el siguiente sistema aplicando Pitágoras sobre los dos triángulos rectángulos obtenidos al trazar la altura del triángulo.

$$\begin{cases} 4^2 = h^2 + x^2 \\ 18^2 = h^2 + (20-x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h^2 = 16 - x^2 \\ h^2 = -x^2 + 40x - 76 \end{cases} \rightarrow 16 - x^2 = -x^2 + 40x - 76$$

De esta ecuación obtenemos los valores de x y de h: $x = 2'3$ cm, $h = 3'27$ cm.

**34.**

Aplicando Pitágoras sobre uno de los triángulos tenemos:

$H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow 11'24^2 = 6'4^2 + C^2 \rightarrow C = 9'24$ cm.

De este modo tenemos la medida de todos los lados del rectángulo.

Perímetro: $6'4 \cdot 2 + 9'24 \cdot 2 = 31'28$ cm.

**35.**

Aplicando Pitágoras sobre uno de los triángulos en los que queda dividido el cuadrado al trazar la diagonal tenemos que:

$H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow 7^2 = 2C^2 \rightarrow C = 4'95$ cm mide cada lado del cuadrado.

Perímetro: $4'95 \cdot 4 = 19'8$ cm.

**36.**

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre uno de los triángulos que obtenemos al trazar las diagonales del rombo, de catetos 5 y 12 cm.

$H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow l^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow l = 13$ cm.

De este modo, obtenemos que el lado del rombo mide 13 cm, y su perímetro 52 cm.

**37**.

Para calcular el área de dicho hexágono necesitamos calcular su apotema. Podemos dividir el hexágono en 6 triángulos equiláteros de lado 8cm, de manera que la altura de cada uno de ellos cae sobre la mitad del lado opuesto y coincide con su apotema. Si aplicamos Pitágoras sobre uno de esos triángulos tenemos que:

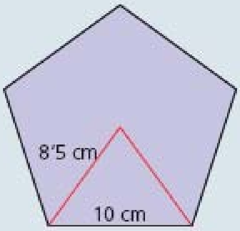
$H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow 8^2 = a^2 + 4^2 \rightarrow a = 6'93$ cm.

Una vez que conocemos la apotema podemos calcular su área:

$$A_h = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6'93}{2} = 166'28\ cm^2.$$

# ACTIVIDADES **FINALES**

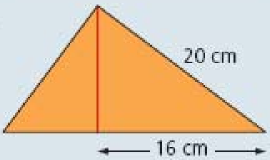
**38.** Calcula el área de un pentágono regular de 10 cm de lado y cuyo radio de la circunferencia circunscrita mide 8'5 cm:



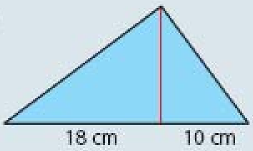

**39.** Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm, calcula la altura del triángulo sobre la hipotenusa.

**40.** Calcula el perímetro de estos triángulos rectángulos:

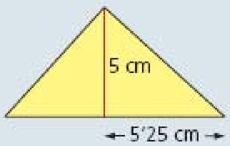
a)



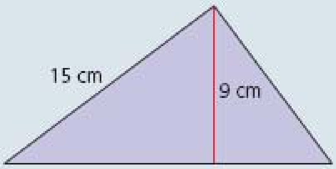

b)




c)




**41.** Calcula el perímetro del siguiente triángulo rectángulo:




## Área y volumen de figuras semejantes

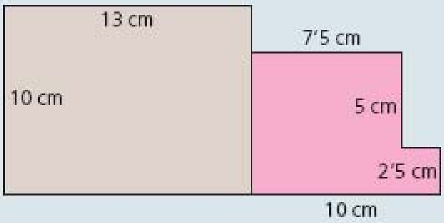
**42.** El área de un cuadrado es 20 $cm^2$. Calcula el área de un cuadrado semejante a este con razón de semejanza 2'1.

**43.** El perímetro de un paralelogramo es 18 m. Calcula el perímetro de un paralelogramo semejante a este con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.

**44.** El volumen de una pirámide es 18 $cm^3$. Calcula el volumen de una pirámide semejante a esta con razón de semejanza 0'2.

**45.** Sea un triángulo de 6 $cm^2$ de área y con uno de sus lados de 2'4 cm. Calcula el área de un triángulo semejante a este cuyo lado correspondiente al anterior mida 3'2 cm.

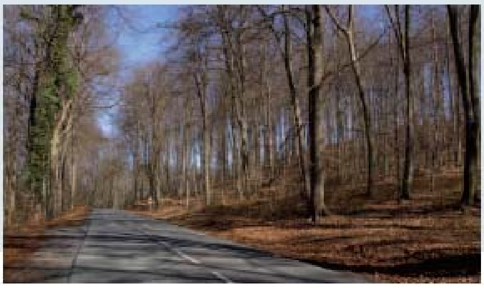
**46.** El siguiente plano está a escala 1:25. Calcula el perímetro y el área real de cada habitación:



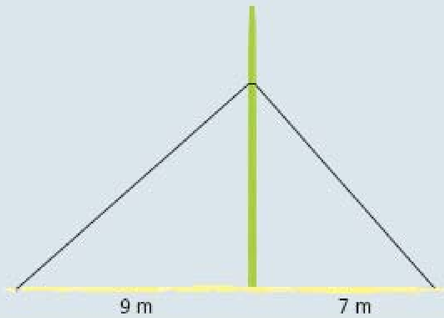

## → PROBLEMAS

**47.** Juan coloca una escalera que mide 10 m separada 6 m de una pared. ¿A qué altura estará el punto más alto de la escalera?

**48.** Un árbol de 15 m de altura tiene una sombra de 7 m a las 2 de la tarde. Si a esa misma hora Ana tiene una sombra de 0'77 m, ¿cuánto mide Ana?



**49.** Un poste está sujeto al suelo con dos alambres que forman un ángulo recto en su unión. Si la distancia de cada alambre a la base del poste es 7 y 9 m, ¿cuánto alambre se ha utilizado y a qué altura está atado el poste?



**38.**

El área de un pentágono regular viene dada por $A=\dfrac{p\cdot a}{2}$.

En nuestro caso, el perímetro del pentágono es 50, luego $A=\dfrac{50\cdot a}{2}=25a$.

La apotema coincide con la altura del triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el radio de la circunferencia circunscrita (8'5 cm), y uno de los catetos es la mitad del lado del pentágono (5 cm).

Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$H^2=C^2+c^2 \rightarrow 8'5^2=a^2+5^2 \rightarrow a\ \ =6'87$ cm.

$A=25a=25\cdot 6'87$

Solución: El área del pentágono es $171'85\text{ cm}^2$.

**39.**

Por el teorema de Pitagoras conseguimos la hipotenusa de nuestro triángulo:

$H^2=C^2+c^2 \rightarrow H^2=8^2+6^2 \rightarrow H\ \ =10\ \ =x+y$

*Observación*: *x e y son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.*

Si volvemos a aplicar el teorema sobre cada uno de los triángulos que nos quedan al trazar la altura sobre la hipotenusa, podemos consegir las proyecciones de los catetos.

$$\begin{cases}36=h^2+x^2\\64=h^2+y^2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}36=h^2+(10-y)^2\\h^2=64-y^2\end{cases} \rightarrow 36=64-y^2+100-20y-y^2$$

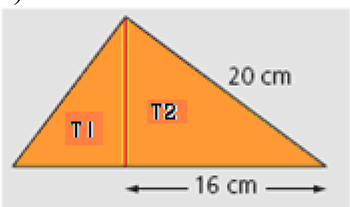
$y=6'4$ cm, x $=3'6$ cm.

por el teorema de la altura: $h^2=x\cdot y=3'6\cdot 6'4=23'04$.

Solución: La altura del triángulo es 4'8 cm.

**40.**

a)




Triángulo 2:

Teorema de Pitágoras: $H^2=C^2+c^2 \rightarrow 20^2=16^2+h^2 \rightarrow h=12$ cm.

Teorema de la altura: $\text{h}^2=x\cdot y \rightarrow 144=16x \rightarrow x=9$ cm.

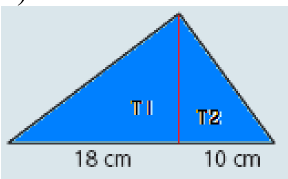
Triángulo 1:

Teorema de Pitágoras: $H^2=C^2+c^2 \rightarrow H^2=9^2+12^2 \rightarrow H=15$ cm.

Perímetro: $P=15+20+16+9=60$ cm.

Solución: El perímetro del triángulo es 60 cm.

b)




Triángulo 1:

Teorema de la altura: $h^2 = x \cdot y \to h^2 = 18 \cdot 10 \to h = 13'42$ cm.

Teorema de Pitágoras: $H^2 = C^2 + c^2 \to H_1^2 = 18^2 + 13'42^2 \to H_1 = 22'45$ cm.

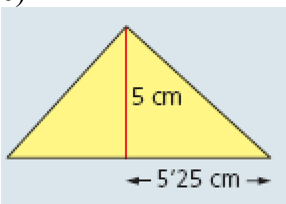
Triángulo 2:

Teorema de Pitágoras: $H^2 = C^2 + c^2 \to H_2^2 = 10^2 + 13'42^2 \to H_2 = 16'73$ cm.

Perímetro: $P = 18 + 10 + 22'45 + 16'73 = 67'18$ cm.

Solución: El perímetro del triángulo es 67'18 cm.

c)




Triángulo 2:

Teorema de Pitágoras: $H^2 = C^2 + c^2 \to H_2^2 = 5^2 + 5'25^2 \to H_2 = 7'25$ cm.

Teorema de la altura: $h^2 = x \cdot y \to 25 = 5'25x \to x = 4'76$ cm.

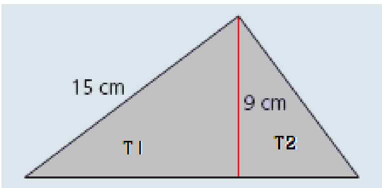
Triángulo 1:

Teorema de Pitágoras: $H^2 = C^2 + c^2 \to H^2 = 5^2 + 4'76^2 \to H = 6'9$ cm.

Perímetro: $P = 6'9 + 7'25 + 5'25 + 4'76 = 24'16$ cm.

Solución: El perímetro del triángulo es 24'16 cm.

**41.**




Triángulo 1:

Teorema de Pitágoras: $H^2 = C^2 + c^2 \to 15^2 = 9^2 + x^2 \to x = 12$ cm.

Triángulo 2:

Teorema de la altura: $h^2 = x \cdot y \to 81 = 12y \to y = 6'75$ cm.

Teorema de Pitágoras: $H^2 = C^2 + c^2 \to H_2^2 = 9^2 + 6'75^2 \to H_2 = 11'25$ cm.

Perímetro: $P = 15 + 11'25 + 6'75 + 11'25 = 45$ cm.

Solución: El perímetro del triángulo es 45 cm.

## Área y volumen de figuras semejantes.

**42.**

Si la razón de semejanza entre dos triángulos es 2’1, la razón entre sus áreas es su cuadrado, es decir, 4’41. Así:

$A_{c'} = A_c \cdot r^2 = 20 \cdot 4'41 = 88'2 \text{ cm}^2$

El área del segundo cuadrado es 88’2 cm$^2$.

**43.**

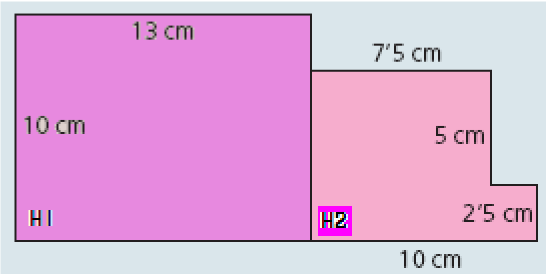
Sabiendo que la razón entre los lados y la razón entre las áreas se mantiene, entonces, el perímetro del segundo paralelogramo es:

$P_{p_2} = P_{p_1} \cdot r = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ cm.

**44.**
Si la razón de semejanza entre los lados de dos pirámides es 0’2, la razón entre sus volúmenes es su cubo, es decir, 0’008. Así:
$V_{p_2} = V_{p_1} \cdot r^3 = 18 \cdot 0'008 = 0'144 \text{ cm}^3$
El volumen de la segunda pirámide es 0’144 $\text{cm}^3$.

**45.**
La razón de semejanza entre los dos triángulos es
$r = \dfrac{3'2}{2'4} = 1'33$, por lo tanto, la razón entre sus áreas es su cuadrado, es decir, 1’78. Así:
$A_{t_2} = A_{t_1} \cdot r^2 = 6 \cdot 1'78 = 10'67 \text{ cm}^2$
El área del segundo triángulo es 10’67 $\text{cm}^2$.

**46.**




El perímetro de la figura es

Habitación 1: $\text{P}_1 = 10 + 13 + 10 + 13 = 46 \text{ cm}$

Estando a una escala 1:25, el perímetro real es: $\text{P}_{r_1} = \text{P}_1 \cdot 25 = 1150 \text{ cm}$.

Habitación 2: $\text{P}_2 = 7'5 + 7'5 + 5 + 2'5 + 2'5 + 10 = 35 \text{ cm}$.

Estando a una escala 1:25, el perímetro real es: $\text{P}_{r_2} = \text{P}_2 \cdot 25 = 875 \text{ cm}$.

El área de la figura viene dada por:

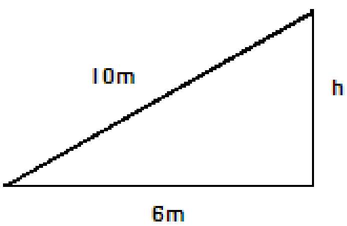
Habitación 1: $\text{A}_1 = b \cdot h = 13 \cdot 10 = 130 \text{ cm}^2$

Estando a una escala 1:25, el área real es: $\text{A}_{r_1} = \text{A}_1 \cdot 25^2 = 81250 \text{ cm}^2 = 8'125 \text{ m}^2$

Habitación 2: $\text{A}_2 = 7'5 \cdot 10 - 5 \cdot 2'5 = 62'5 \text{ cm}^2$

Estando a una escala 1:25, el área real es: $\text{A}_{r_2} = \text{A}_2 \cdot 25^2 = 39062'5 \text{ cm}^2 = 3'90625 \text{ m}^2$

**47.**

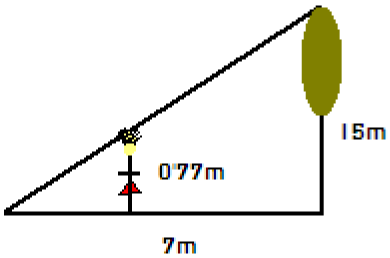



El problema se reduce a aplicar Pitágoras sobre el triángulo de la figura:

$H^2 = C^2 + c^2 \to 10^2 = 6^2 + h^2 \to h = 8$ m.

La escalera mide 8 metros.

**48.**




Los dos triángulos que se forman son semejantes, luego,

$$\frac{15}{0'77} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 0'36 \text{ metros.}$$

La sombra de Ana mide 0'36 metros.

**49.**
El problema consiste en calcular los catetos del triángulo.

Por el teorema del cateto:

$C^2 = H \cdot P = 16 \cdot 9 = 144 \rightarrow C = 12$ m.

$c^2 = H \cdot p = 16 \cdot 7 = 45 \rightarrow c = 10'58$ m.

Cantidad de alambre = $C + c = 12 + 10'58 = 22'58$ m.

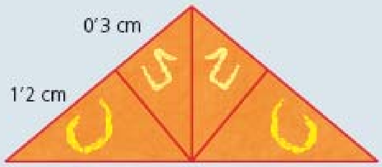
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n \rightarrow h^2 = 9 \cdot 7 \rightarrow h = 7'94$ m.

Así, se han utilizado 22'58 metros de alambre y el poste se ha atado a 7'94 metros de altura.

## PÁGINA 153

**50.** Dadas dos circunferencias concéntricas cuyos radios miden 5 y 7 cm, ¿son semejantes? En caso afirmativo calcula su razón de semejanza.

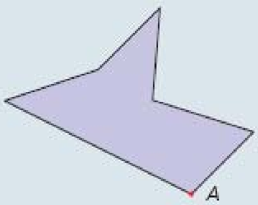
**51.** Una cometa con forma de triángulo isósceles tiene la estructura que se describe en la figura. Calcula la cantidad de tela necesaria para forrarla:



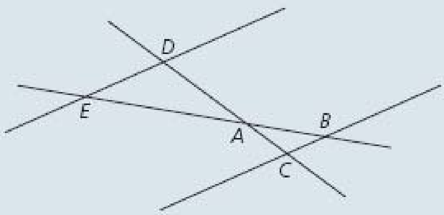

**52.** Ana está mirando al fondo de un pozo a 1′5 m de distancia del borde. Si el diámetro del pozo es de 5 m y Ana mide 1′7 m de alto, ¿qué profundidad tiene el pozo?

## AUTOEVALUACIÓN

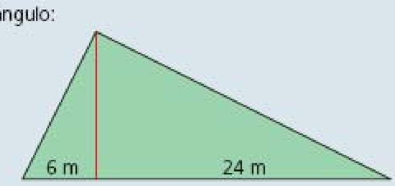
**1.** Construye en tu cuaderno una figura semejante a la siguiente, proyectando desde el punto *A*.



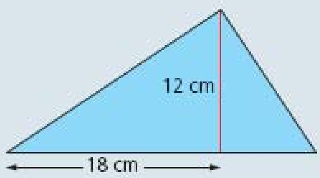

**2.** Indica si son semejantes los triángulos *ABC* y *DAE*.




**3.** Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:




**4.** Calcula los catetos del siguiente triángulo rectángulo:

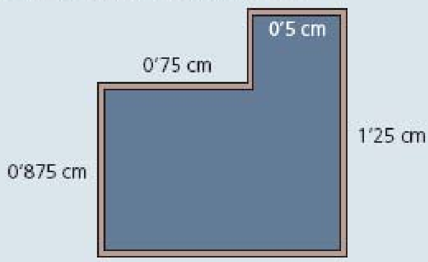



**5.** Calcula el área del siguiente trapecio rectángulo:


**6.** Calcula la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 16 y 12 cm.

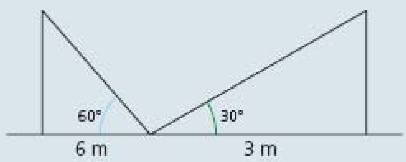
**7.** Calcula el área de un triángulo de lados 5, 7 y 9 cm.

**8.** Calcula el perímetro y el área reales del siguiente plano, sabiendo que está hecho a escala 1:80.



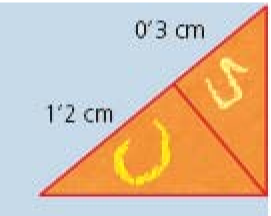

**9.** Un poste está sujeto por dos alambres que forman un ángulo recto. Si la distancia de cada alambre al poste es de 3 y 7 m, calcula la longitud de los alambres y la altura a la que están atados los alambres al poste.

**10.** Dos farolas están unidas por un cable como se muestra en la figura. Calcula la altura de las farolas y la cantidad de cable utilizado.



**50.**
La definición de semejanza nos dice que dos figuras serán semejantes si tienen a misma forma pero distinto tamaño, así, dos circunferencias concéntricas cumplirían esta condición.
Para el caso concreto en el que los radios fueran 5 y 7 centímetros, su razón de semejanza coincidirá con el cociente entre ellos, es decir, 7/5 = 1’4.

**51.**
Vamos a quedarnos sólo con la mitad de la cometa, y sobre ella vamos a aplicar el teorema de la altura.



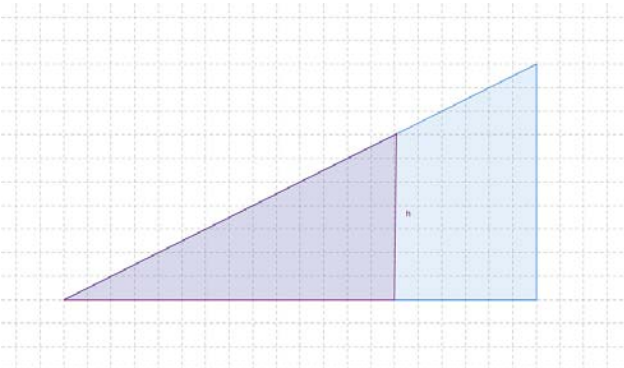

Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n \to h^2 = 1'2 \cdot 0'3 \to h = 0'6$ m.

El área de un triángulo viene dada por:

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(1'2 + 0'3) \cdot 0'6}{2} = 0'45 \text{ cm}^2$$

Hemos calculado el área de la mitad de la cometa, luego, el área de toda la cometa es 0’45·2 = 0’9 cm$^2$.

**52.**

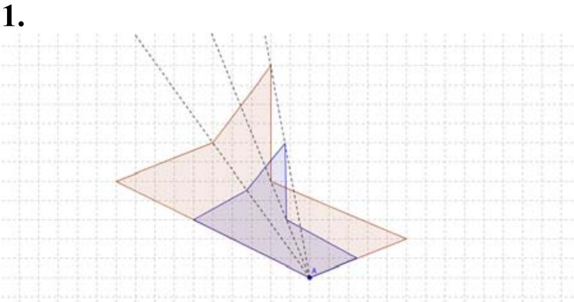


$$\frac{6'5}{1'7} = \frac{5}{h} \Rightarrow h = 1'31 \text{ m}$$

Solución: El pozo tiene una profundidad de 1'31 m.

## AUTOEVALUACIÓN

**1.**



**2.**
Ambos triángulos tiene dos lados que pertenecen a la misma recta y los otros dos lados son paralelos, luego, son semejantes.

**3.** Aplicamos el teorema de la altura y tenemos que: $h^2 = m \cdot n \rightarrow h^2 = 6 \cdot 24 \rightarrow h = 12$ m.

**4.**
Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n \rightarrow 144 = 18 \cdot n \rightarrow n = 8$ cm.

Por el teorema del cateto: $\mathrm{C}^2 = H \cdot P = 26 \cdot 18 = 468 \rightarrow C = 21'63$ cm.

$\mathrm{c}^2 = H \cdot p = 26 \cdot 8 = 208 \rightarrow c = 14'42$ cm.

Solución: Los catetos miden 21'63 cm y 14'42 cm.

**5.**
El área de un trapecio viene dada por la siguiente fórmula:

$$\mathrm{A_{trp}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(18+15) \cdot h}{2} = 16'5h$$

Para calcular la altura, basta con aplicar Pitágoras al triángulo rectángulo de hipotenusa 5 mm y cateto 3 mm.

$\mathrm{H}^2 = C^2 + c^2 \rightarrow 5^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = 4$ mm.

Así, el área del trapecio es: $\mathrm{A_{trp}} = 16'5h = 66\ \mathrm{mm}^2$.

**6.**
Aplicando Pitágoras a nuestro triángulo tenemos $H^2 = C^2 + c^2 \rightarrow H^2 = 16^2 + 12^2 \rightarrow H = 20$ cm.

Por el teorema del cateto, podemos calcular $x$ e $y$, cada una de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa:

$C^2 = H \cdot x \rightarrow 16^2 = 20 \cdot x \rightarrow x = 12'8$ cm.

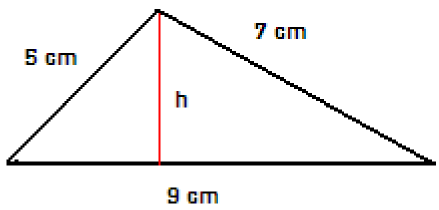
$y = 20 - 12'8 = 7'2$ cm.

Si ahora alicamos el teorema de la altura, hemos resuelto el problema:

$\mathrm{h}^2 = x \cdot y \rightarrow \mathrm{h}^2 = 12'8 \cdot 7'2 \rightarrow h = 9'6$ cm.

La altura del triángulo sobre la hipotenusa es 9'6 cm.

**7.**
Sabemos que para calcular el área de un triángulo necesitamos conocer la base (9 cm) y la altura. Trazaremos la altura que cae sobre el lado de 9 cm, de modo que nuestro triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos como muestra la figura.




Aplicando Pitágoras en cada uno de ellos obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 25 = h^2 + x^2 \\ 49 = h^2 + (9-x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h^2 = 25 - x^2 \\ 49 = h^2 + 81 - 18x + x^2 \end{cases} \rightarrow 49 = 25 - x^2 + 81 - 18x + x^2 \rightarrow 18x = 57$$

$x = 3'17$ cm. $\Rightarrow$ Sustituyendo en la primera ecuación, $h = 3'87$

Solución: La altura del triángulo es 3'87 cm.

**8.**

El perímetro de la figura es

$$\mathrm{P} = 0'875 + 0'75 + (1'25 - 0'875) + 0'5 + 1'25 + 0'5 + 0'75 = 5 \text{ cm}$$

Estando a una escala 1:80, el perímetro real es: $\mathrm{P}_r = \mathrm{P} \cdot 80 = 400$ cm.

El área de la figura viene dada por:

$$\mathrm{A}_1 = b \cdot h = 1'25 \cdot 1'25 = 1'5625 \text{ cm}^2$$

$$\mathrm{A}_2 = b \cdot h = 0'75 \cdot (1'25 - 0'875) = 0'28125 \text{ cm}^2$$

$$\mathrm{A}_\mathrm{T} = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 = 1'5625 - 0'28125 = 1'28125 \text{ cm}^2$$

Estando a una escala 1:80, el área real es: $\mathrm{A}_r = \mathrm{A}_T \cdot 80^2 = 8200 \text{ cm}^2 = 0'82 \text{ m}^2$

**9.**

El problema consiste en calcular los catetos del triángulo.

Por el teorema del cateto:

$\mathrm{C}^2 = H \cdot P = 10 \cdot 3 = 30 \rightarrow C = 5'48$ m.

$\mathrm{c}^2 = H \cdot p = 10 \cdot 7 = 70 \rightarrow c = 8'37$ m.

Cantidad de alambre = $C + c = 5'48 + 8'37 = 13'85$ m.

Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n \rightarrow h^2 = 3 \cdot 7 \rightarrow h = 4'58$ m.

Así, se han utilizado 13’85 metros de alambre y el poste se ha atado a 4’58 metros de altura.

**10.** Según las medidas de los ángulos que aparecen en la figura, ambos triángulos son semejantes, Si usamos el coseno de 30, podemos calcular la longitud del cable que utilizamos para la farola de la derecha: 3’46 metros. Y aplicando la tangente, calculamos su altura: 1’73m.

Aplicando el mismo procedimiento en la farola de la izquierda, conseguimos la longitud del cable y su altura: 12 m y 10’39 respectivamente.

Por tanto, las alturas de las farolas son 3’46 metros y 10’39 metros, y necesitamos 15’46 metros de cable.

## PÁGINA 154

**OLIMPIADA MATEMÁTICA**

- El señor Blanco, el señor Rojo y el señor Pardo se encuentran por la calle.

  —Qué curioso —dice el que lleva corbata roja—, los colores de nuestras corbatas se corresponden con nuestros apellidos, pero ninguno lleva el color propio.

  —Tiene usted razón —comenta el señor Blanco.

  ¿De qué color es la corbata de cada señor?

Pardo lleva la corbata roja, Blanco lleva la parda y Rojo lleva la blanca.