TEMA 4

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE. MOVIMIENTO ONDULATORIO. SONIDO.

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD.

1. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

   $y(x, t) = 0'5 \text{sen}\ \pi(8t-4x)$ (en unidades S.I.)

   a) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda y explique el significado de cada una de ellas.
   b) Represente gráficamente la posición de los puntos de la cuerda en el instante t = 0, y la elongación en x = 0 en función del tiempo.

a) Ecuación de la onda :

$$y(x,t) = 0'5 \text{sen}\pi\ (8t - 4x) = 0'5 \text{sen}\ (8\pi t - 4\pi x)$$

Si la comparamos con la ecuación general:

$$y(x,t) = A.\text{sen}\ (\omega t - kx)$$

Deducimos que:

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0'5\,\text{m} \\ \omega = 8.\pi \rightarrow 2.\pi.\nu = 8.\pi \rightarrow \nu = 4\text{Hz} \\ k = 4.\pi \rightarrow \dfrac{2.\pi}{\lambda} = 4.\pi \rightarrow \dfrac{2.\pi}{4.\pi} = \lambda \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}m \end{array}\right\}$$

Puesto que la velocidad de propagación es:

$$v_{PROPAG} = \lambda.v \rightarrow v_{PROPAG} = \frac{1}{2}.4 = 2\ \text{m/s}$$

Por otro lado, la velocidad de vibración de la onda se obtendrá considerando que:

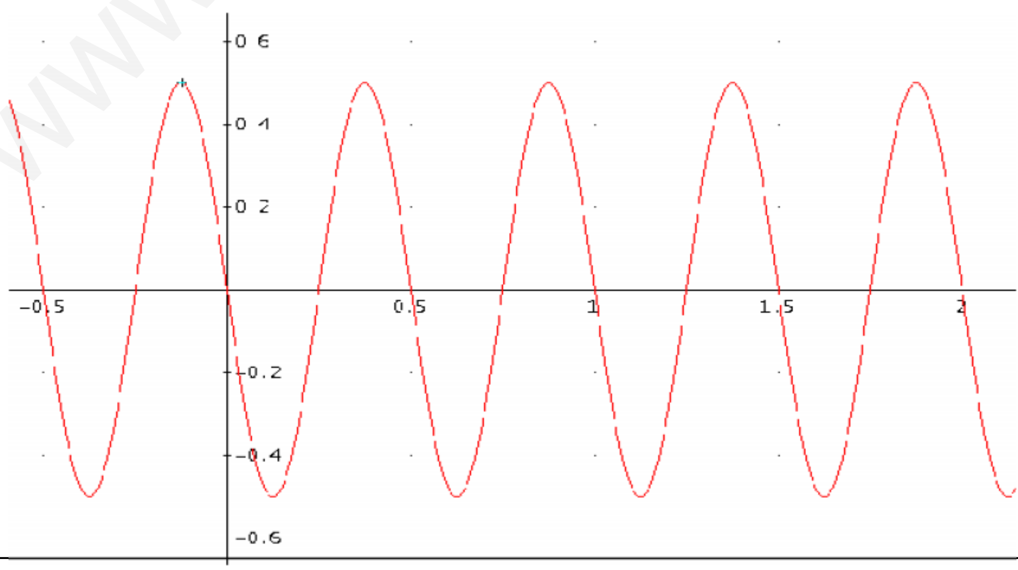
$$v_{vibr} = \frac{dy(x,t)}{dt} = 4.\pi.\cos(8\pi t - 4\pi x)\quad \text{m.s}^{-1}$$

b1) Para t=0, la ecuación queda como:

$$y(x,0) = 0'5\text{sen}\,\pi\ (-4x) = 0'5\text{sen}\ (-4\pi x)$$

$$y(x,0) = -0'5\text{sen}\ (4\pi x)$$

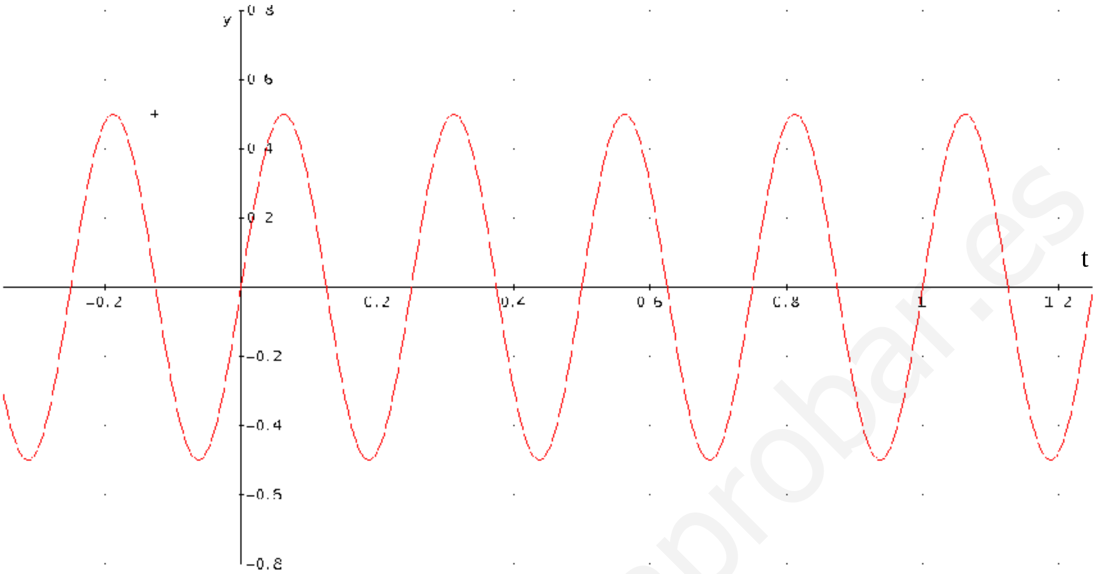
x	0	0´1	0´2	0´3	0´4	0´5	0´6	0´7	0´8	0´9	1´0
y	0	-0´47	-0´89	0´29	0´47	0	-0´47	-0´29	0´29	0´47	0



b2) Para x=0:

$y(0,t) = 0'5\,\text{sen}\,\pi\,(8t) = 0'5\,\text{sen}\,(8\pi t)$

t	0	0´1	0´2	0´3	0´4	0´5	0´6	0´7	0´8	0´9	1´0
y	0	0´29	-0´19	0´47	-0´29	0	0´29	-0´19	0´47	0´29	0



2. a) Explique las características de una onda estacionaria.
   b) Razone por qué la frecuencia del sonido producido por una cuerda de guitarra puede modificarse variando la tensión de la cuerda o pisando diferentes trastes (variando su longitud).

a) La ecuación:

$y(x,t) = 0{,}4\,\text{sen}12\pi x \cos 40\pi t$

Corresponde a una onda estacionaria:

Este tipo de ondas surge, por ejemplo, al considerar la interferencia de dos ondas de iguales características que se desplazan en igual dirección pero de sentido contrario. La onda interferente resultante se conoce como ***ONDA ESTACIONARIA***.

Estas ondas surgirán sólo si las ondas iniciales cumplen con determinadas condiciones iniciales (entre otras, determinados valores de frecuencia).

Las ondas estacionarias se caracterizan por:

- ✓ La onda resultante (es decir, la ondas estacionaria) ***no viaja***. La ondulación no se desplaza, a diferencia de una onda libre.
- ✓ Existen puntos en los que la perturbación ***es siempre*** nula, como consecuencia de una interferencia destructiva. Son los ***NODOS***
- ✓ Asimismo, existen otros en los que, a consecuencia de una interferencia constructiva, la perturbación es máxima; son los ***VIENTRES***.
- ✓ En el caso en el que se halle limitado por ambos lados, no puede producirse cualquier onda, sino ***sólo las que originen nodos en los extremos fijos del medio.***

Matemáticamente:

$$y_1 = A.\cos\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right) = A.\text{sen}\,(\omega t + kx) \qquad \text{(Puesto que la onda parte del punto de equilibrio)}$$

Al chocar contra la pared la onda reflejada invierte su fase. Así:

$$y_2 = A.\text{sen}\,(\omega t - kx + \pi) = -A.\text{sen}\,(\omega t - kx)$$

La onda resultado de la interferencia será:

$$y = y_1 + y_2 = \mathrm{A.sen}(\omega t + kx) - \mathrm{A.sen}(\omega t - kx) = \mathrm{A.}[\mathrm{sen}(\omega t + kx) - \mathrm{sen}(\omega t - kx)]$$

Y ahora, conociendo la expresión:

$$senA - senB = 2.\cos\frac{A+B}{2}\,sen\frac{A-B}{2}$$

Tendremos, para nuestro caso:

$$y = \mathrm{A.}[\mathrm{sen}(\omega t + kx) - \mathrm{sen}(\omega t - kx)] = 2.\mathrm{A.}\left[\cos\frac{(\omega t + kx) + (\omega t - kx)}{2}.sen\frac{(\omega t + kx) - (\omega t - kx)}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2.\mathrm{A.}\cos\omega t.senkx$$

La expresión:

$$y = 2.\mathrm{A.}\cos\omega t.senkx$$

, constituye la ecuación de una onda estacionaria.

Llamando A_R:

$A_R = 2.\mathrm{A.sen}\,kx$ (,independiente del tiempo, pero variable para en función de x)

, su valor será mínimo (A_R=0), cuando:

$$senkx = 0 \rightarrow kx = n.\pi \rightarrow \frac{2.\pi}{\lambda}.x = n.\pi \rightarrow x = n.\frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = n.\frac{\lambda}{2} \\ x_2 = (n+1).\frac{\lambda}{2} \end{array}\right\}\Delta x = \left[(n+1).\frac{\lambda}{2}\right] - \left[n.\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}$$

, que nos indica la posición de los nodos.

Por otro lado, el valor de A_R será máxima (A_R=2A) cuando:

$$senkx = \pm 1 \rightarrow kx = (2n+1).\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2.\pi}{\lambda}.x = (2n+1).\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2n+1).\frac{\lambda}{4}$$

b) Supongamos de nuevo nuestra cuerda de longitud **L** .

En este caso, en el extremo fijo deberá existir un nodo, y otro en el extremo libre (x=L)

Aplicando al extremo libre la ecuación de los nodos:

, que nos indica la posición de los vientres.

$$\left.\begin{array}{l} x = L \\ x = \frac{n.\lambda}{2} \end{array}\right\} \rightarrow L = \frac{n.\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2.L}{n}$$

, que se corresponde con las frecuencias:

$$\frac{v}{\nu} = \frac{2.L}{n} \rightarrow \nu = \frac{n.v}{2.L} \quad (n = 1,2,3.....)$$

Así pues, sólo serán posibles aquellas ondas estacionarias cuya frecuencia sea un múltiplo de la fundamental (n=1)

Fcia fundamental: $\nu_1 = \frac{n.v}{2.L} = \frac{v}{2.L}$

Segundo armónico: $\nu_2 = \frac{n.v}{2.L} = \frac{2.v}{2.L} = 2.\nu_1$

Tercer armónico: $\nu_3 = \frac{n.v}{2.L} = \frac{3.v}{2.L} = 3.\nu_1$

, y así sucesivamente.

Luego, al variar la longitud de la cuerda, variará la frecuencia de la onda

Por otro lado, la velocidad de una onda transversal que se propaga por una cuerda viene dada por la expresión:

$$v_{PROPAG} = \sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

, donde $\begin{cases} T = \text{tensión de la cuerda (N)} \\ \eta = \text{densidad lineal (Kg.m}^{-1}) \end{cases}$

Por lo que al aumentar la tensión de la cuerda, la velocidad de propagación aumenta. Y puesto que $\nu_n = \frac{n.v}{2.L}$, al aumentar la velocidad de propagación, aumentará la frecuencia

3. Sobre una superficie horizontal se dispone un cuerpo de 0'5 kg unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se suelta, comienza a oscilar con un período de 2 s.
   a) Haga un análisis energético del problema y calcule los valores de las energías cinética y potencial en los puntos extremos de la oscilación y en el punto de equilibrio.
   b) Represente la posición del cuerpo en función del tiempo. ¿Cómo cambiaría dicha representación si la masa del cuerpo fuerza de 2 kg?

Datos:

$$\begin{cases} m = 0'5kg \\ \Delta x = 0'1m \\ \tau = 2s \end{cases}$$

a) Al alargar el muelle, este adquiere una energía potencial elástica ($E_P = \frac{1}{2}Kx^2$), que, para el extremo del resorte valdrá: $E_P = \frac{1}{2}KA^2$, y supondrá el valor máximo de la energía.

Si se deja en libertad el muelle, comenzará a oscilar en torno a su posición de equilibrio siguiendo un movimiento del tipo MAS, de modo que, en ausencia de rozamientos, la energía mecánica se mantiene constante. A medida que va aproximándose a la posición de equilibrio, la energía potencial elástica irá disminuyendo, y aumentará la energía cinética asociada, desde cero hasta el valor máximo en el punto de equilibrio. A partir de este momento, el muelle continuará su movimiento "al otro lado" del punto de equilibrio, con lo que se invierte el proceso energético. Ahora la energía potencial vuelve a aumentar progresivamente hasta alcanzar su valor máximo en la elongación, en este caso, de valor –A; en cuanto a la energía cinética, irá disminuyendo hasta que, llegado el punto de máxima elongación su valor será cero.

a2) Como bien sabemos.

$$\begin{cases} E_{P,E} = \dfrac{1}{2}Kx^2 \\ E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

Para determinar K, recordemos que: $K = m.\omega^2 = m.(2.\pi.\nu)^2 = 4.\pi^2.m.\nu^2 = \dfrac{4.\pi^2.m}{\tau^2}$

Sustituyendo para determinar K:

$$K = \frac{4.\pi^2.0'5}{2^2} = \frac{\pi^2}{2}N.m^{-1}$$

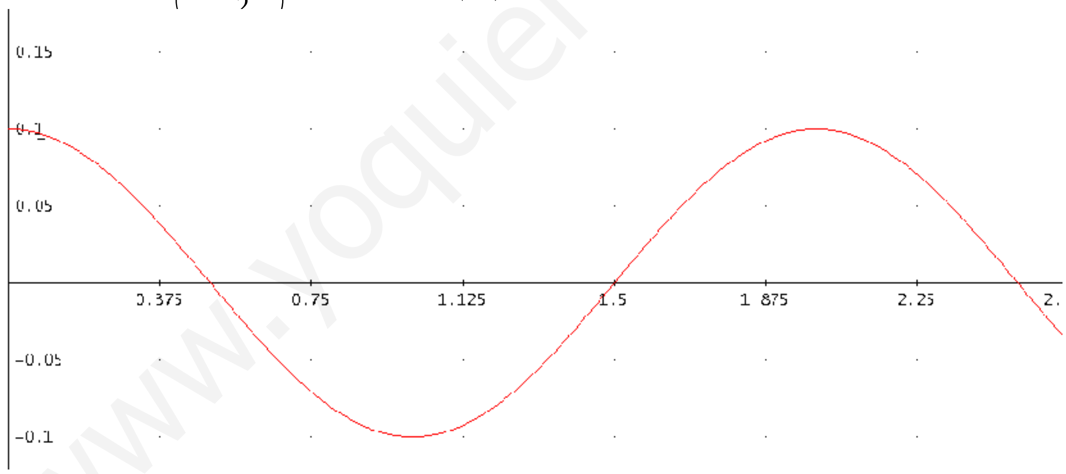
Podemos ahora calcular los valores de energía, en primer lugar para x=0´1

$$\left.\begin{cases} E_{P,E} = \dfrac{1}{2}KA^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{2}\right).0'1^2 = \dfrac{0'01.\pi^2}{4}J \\ E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow E_M = \frac{0'01.\pi^2}{4} + 0 = \frac{0'01.\pi^2}{4}J$$

Cuando x=0:

$$\left.\begin{cases} E_{P,E} = \dfrac{1}{2}Kx^2 = 0J \\ E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 \end{cases}\right\} \rightarrow \text{Al conservarse la } E_M \rightarrow E_K = \frac{0'01.\pi^2}{4}J$$

b1) $y = 0'1.\cos\left(2.\pi.\dfrac{1}{2}.t\right) \rightarrow y = 0'1.\cos(\pi.t)$



b2) En el caso en el que la masa sea de 2 Kg, y teniendo en cuenta que la constante elástica es un valor característico del muelle, el valor de K será el mismo, por lo que la energía potencial elástica asociada deberá ser la misma. Sin embargo, puesto que:

$$K = m.\omega^2 = m.(2\pi\nu)^2 = 4.\pi^2.m\nu^2$$

La variación de la masa conducirá a una modificación de la frecuencia de vibración del muelle

$$\left.\begin{cases} K = 4.\pi^2.m_1.\nu_1^2 \\ K = 4.\pi^2.m_2.\nu_2^2 \end{cases}\right\} \rightarrow \frac{K}{K} = \frac{4.\pi^2.m_1.\nu_1^2}{4.\pi^2.m_2.\nu_2^2} \rightarrow 1 = \frac{m_1.\nu_1^2}{m_2.\nu_2^2} \rightarrow 1 = \frac{0'5.\nu_1^2}{2.\nu_2^2} \rightarrow 4.\nu_2^2 = \nu_1^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu_1 = 2.\nu_2$$

4. a) Explique las características de un movimiento oscilatorio.
b) Un acróbata salta verticalmente en una cama elástica. Explique los tipos de energía que intervienen y sus transformaciones.

a) Al observar la Naturaleza nos damos cuenta de que muchos procesos físicos (por ejemplo la rotación de la tierra en torno al eje polar) son repetitivos, sucediéndose los hechos cíclicamente tras un intervalo de tiempo fijo. En estos casos hablamos de movimiento periódico y lo caracterizamos mediante su período, que es el tiempo necesario para un ciclo completo del movimiento, o su frecuencia, que representa el número de ciclos completos por unidad de tiempo.
Un caso interesante de movimiento periódico aparece cuando un sistema físico oscila alrededor de una posición de equilibrio estable. El sistema realiza la misma trayectoria, primero en un sentido y después en el sentido opuesto, invirtiendo el sentido de su movimiento en los dos extremos de la trayectoria. Un ciclo completo incluye atravesar dos veces la posición de equilibrio. La masa sujeta al extremo de un péndulo o de un resorte realiza un movimiento oscilatorio.
El caso más sencillo de movimiento oscilatorio se denomina movimiento armónico simple y se produce cuando la fuerza resultante que actúa sobre el sistema es una fuerza restauradora lineal.

Este tipo de movimiento puede definirse como el ***"movimiento de oscilación de una(s) partícula(s) respecto a una posición de equilibrio, a lo largo de una misma dirección"***, siendo típico de los cuerpos elásticos.

Existen muchas variantes de movimientos vibratorios, pero el más simple es el **MOVIMIENTO (VIBRATORIO) ARMÓNICO SIMPLE**, cuya abreviatura es **M.A.S.** (o MVAS).

La descripción matemática de este MAS se realiza considerándolo como la proyección de un movimiento circular uniforme (MCU) de radio A sobre uno de sus diámetros.

Cuando la partícula se encuentra en un punto (para un tiempo t), la proyección sobre el eje X será:

$$x = A.\cos\theta \rightarrow x = A.\cos\omega t$$

, donde ω es la rapidez angular o frecuencia angular, en rad.s^{-1}.

b) Se trata de una conversión entre energía cinética y potencial elástica.
Analizando tan solo la cama elástica, la fuerza ejercida por el saltador hace que la cama elástica (cuerpo elástico a partir de ahora) se combe hacia abajo. La energía cedida por el saltador se acumula en forma de energía potencial elástica del cuerpo elástico.
A partir de este momento, la fuerza recuperadora hace que el cuerpo elástico tiende a recuperar su estado de equilibrio. Durante este intervalo se va produciendo una de energía potencial elástica en energía cinética. Llegado al punto de equilibrio, el cuerpo elástico tiene su valor máximo de energía cinética (en este instante la velocidad de vibración es máxima). Más tarde se produce la situación a la inversa, es decir, a medida que el cuerpo se aleja de su posición de equilibrio, su energía cinética disminuye, y, debido a su cada vez mayor distanciamiento respecto de la posición de equilibrio, la energía potencial gravitatoria aumenta. El valor máximo de $E_{P,E}$ se alcanza en el máximo estiramiento (amplitud de vibración), instante en el que, claro está, la E_K=0. El proceso se repetiría, al menos teóricamente, de manera indefinida, puesto que, si consideramos al sistema como aislado, no se producirían pérdidas energéticas . Además, y debido a esto último, el contenido de energía total, es decir, la energía mecánica, sería constante a lo largo de todo el proceso.

5. La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y(x, t) = 10 \cos \pi/3x \text{ sen } 2\pi t \qquad \text{(en unidades S.I.)}$$

a) Explique las características de la onda y calcule su período y su longitud de onda. ¿Cuál es la velocidad de propagación?

b) Determine la velocidad de una partícula situada en el punto x = 1'5 m en el instante t = 0'25 sg. Explique el resultado.

$$y(x, t) = 10 \cos \pi/3x \text{ sen } 2\pi t$$

a) Se trata de una onda estacionaria, cuyas características son:

$$\left.\begin{cases} A = 10m \\ k = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow \dfrac{2.\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow \lambda = 6m \\ \omega = 2.\pi \rightarrow 2.\pi.\nu = 2.\pi \rightarrow \nu = 1Hz \end{cases}\right\} \rightarrow v_{PROPAG} = \lambda.\nu = 6.1 = 6 m.s^{-1}$$

b)

$$y(x, t) = 10 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right).sen(2.\pi.t)$$

$$y(1´5, 0´25) = 10 \cos\left(\frac{\pi}{3}.1´5\right).sen(2.\pi.0´25) = 10 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Se trata, pues, de un NODO.

La velocidad de vibración en él debe ser nula. Vamos a comprobarlo:

$$v(x, t) = \frac{d}{dt} y(x, t) = 20.\pi.\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right).\cos(2.\pi.t)$$

Sustituyendo los valores correspondientes:

$$v(1´5, 0´25) = 20.\pi.\cos\left(\frac{\pi}{3}.1´5\right).\cos(2.\pi.0´25) = 20.\pi.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ m.s^{-1}$$

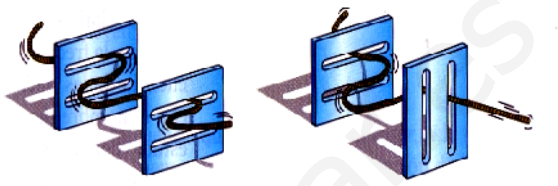
, como ya habíamos predicho.

6. a) ¿En qué consiste el fenómeno de polarización de las ondas?
b)¿Se puede polarizar el sonido? Razone la respuesta.

a) En las ondas transversales, las partículas pueden vibrar en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Si forzamos a que las vibraciones se produzcan en un único plano, tendremos una onda polarizada plana.

El plano que determinan los planos de propagación y de vibración se denomina plano de polarización.

Al generar una onda en una cuerda, las partículas pueden vibrar en cualquier dirección perpendicular a la misma. Pero si se coloca una ventana estrecha, tan sólo podrán pasar por ella las ondas que vibren a lo largo de la ranura; se habrá creado entonces una onda polarizada a lo largo de la ventana.



b) En las ondas longitudinales, como el sonido, la única vibración posible de las partículas es la de la dirección de propagación, por lo que carece de sentido hablar de ondas polarizadas (tal y como afirmó E.L. Malus, en 1808, la polarización es un fenómeno que nos permite diferenciar entre ondas longitudinales y transversales).

7. Al suspender un cuerpo de 0'5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación, se tira hacia abajo, hasta alargar el muelle 2 cm más, y se suelta, comienza a oscilar.
   a) Haga un análisis energético del problema y escriba la ecuación de movimiento de la masa.
   b) Si, en lugar de estirar el muelle 2 cm, se estirara 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?

   $g = 10\ ms^{-2}$

a) Se trata de un MAS en el que se ponen en juego dos tipos de energía, la ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA y la ENERGÍA CINÉTICA.

El movimiento comienza en un punto correspondiente a la amplitud de vibración (estiramiento máximo). En este instante inicial, la energía contenida en el resorte se manifiesta en forma de energía potencial elástica (cuyo valor será máximo e igual a la energía mecánica del sistema). A partir de este instante, el resorte vuelva a su posición inicial; energéticamente esto se traduce en una pérdida paulatina de energía potencial gravitatoria a favor de un aumento de energía cinética (teniendo en cuenta que el valor total, llamado energía mecánica, debe permanecer constante, al tratar el sistema como conservativo, sin pérdidas de energía).

Cuando el resorte alcanza su estado de equilibrio, la energía potencial elástica será nula. Es entonces cuando la energía cinética adopta su valor máximo.

Más tarde, el proceso recorre el camino contrario. A medida que el resorte se aleja del equilibrio, disminuye paulatinamente la energía cinética y aumenta la potencial elástica, hasta que, de nuevo, cuando el estiramiento equivale a la amplitud de la vibración, es máxima (y nula la energía cinética).

La energía potencial elástica tiene un valor de:

$$E_P = \int_{y_1}^{y_2} -K.y.dy = -\frac{1}{2}K.y_2^2 - (-\frac{1}{2}K.y_1^2) = -\Delta E_P \rightarrow E_P = \frac{1}{2}K.y^2$$

La energía cinética tiene un valor de:

$$\mathrm{E_K} = \frac{1}{2}\mathrm{m.v}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m.}\left(\mathrm{A}^2.\omega^2.sen^2(\omega.t+\frac{3\pi}{2})\right) = \frac{1}{2}\mathrm{m..A}^2.\omega^2.\left[1-\cos^2(\omega.t+\frac{3\pi}{2})\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{E_K} = \frac{1}{2}\mathrm{m..}\omega^2.\left[\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}^2\cos^2(\omega.t+\frac{3\pi}{2})\right] = \frac{1}{2}\mathrm{m..}\omega^2.\left[\mathrm{A}^2 - \mathrm{y}^2\right]$$

, y, puesto que la constante recuperadora del muelle es: $\mathrm{K} = \mathrm{m..}\omega^2$, al sustituir nos queda:

$$\mathrm{E_K} = \frac{1}{2}.K.\left[\mathrm{A}^2 - \mathrm{y}^2\right] = \mathrm{E_M} - \mathrm{E_P}$$

b) Se trata de un MAS, cuya ecuación será del tipo: $y = A.\cos(\omega.t + \varphi_0)$

La velocidad angular podrá determinarse considerando que:

$$\left.\begin{cases} F_{ELASTICA} = K.\Delta x \\ F_{ELASTICA} = P \end{cases}\right\} \rightarrow P = K.\Delta x \rightarrow K = \frac{P}{\Delta x} \rightarrow K = \frac{0´5.10}{0´05} = 100\,N.m^{-1}$$

, y puesto que:

$$K = m.\omega^2 \rightarrow 100 = 0´5..\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{200}\ rad.s^{-1}$$

Por otro lado, $\varphi_0 = 0$; de este modo, en el instante inicial la fase $(\omega.t + \varphi_0)$ es nula, con lo que el coseno resulta ser la unidad y, consecuentemente, la elongación coincide con la amplitud (de valor 2 cm).

La ecuación resulta entonces:

$$y = 2.10^{-2}.\cos\left(\sqrt{200}.t\right)$$

En el caso en el que el estiramiento sea de 3 cm, la ecuación del MAS variaría tan sólo en el valor de la amplitud:

$$y = 3.10^{-2}.\cos\left(\sqrt{200}.t\right)$$

8. Una onda plana viene dada por la ecuación:

$$y\ (x,t) = 2 \cos (100t - 5x) \qquad \text{(S.I.)}$$

donde x e y son coordenadas cartesianas.

a) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal y cuál es su sentido de propagación.

b) Calcule la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda.

$$y\ (x,t) = 2 \cos (100t - 5x) \qquad \text{(S.I.)}$$

a) Se trata de una onda armónica que se propaga hacia las abscisas positivas. Es una onda transversal, al venir expresada en función de **x** y de **y**. El hecho de desplazarse hacia la derecha lo muestra el signo negativa que acompaña al término **x**.

Al tratarse de una onda transversal, cada punto del medio alcanzado por la perturbación vibra (**y**) perpendicularmente a la dirección de desplazamiento (**x**).

b) La ecuación general de una onda transversal es:

$$y\ (x,t) = A \cos (\omega t - kx)$$

Comparando ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} y\ (x,t) = 2 \cos (100t - 5x) \\ y\ (x,t) = A \cos (\omega t - kx) \end{cases}\right\} \rightarrow \begin{cases} A = 2m \\ \omega = 100 \rightarrow 2.\pi.\nu = 100 \rightarrow \nu = \dfrac{50}{\pi}\,Hz \\ k = 5 \rightarrow \dfrac{2.\pi}{\lambda} = 5 \rightarrow \lambda = \dfrac{2.\pi}{5}\,m \end{cases}$$

$$v_{PROPAG} = \lambda.\nu = \frac{2.\pi}{5}.\frac{50}{\pi} = 20 m.s^{-1} \text{(abscisas hacia la derecha)}$$

9. Una partícula de 0'5 kg, que describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5/π Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0'2 J y una energía potencial de 0'8 J.
   a) Calcule la posición y velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.
   b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

a)

$$\left[\begin{array}{l} m = 0´5Kg \\ \nu = \frac{5}{\pi}Hz \\ \left.\begin{array}{l} E_{K,0} = 0´2J \\ E_{P,E,0} = 0´8J \end{array}\right\} E_{M,0} = E_M = 1J \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} y = A.\cos(\omega.t + \varphi_0) \\ \mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{A}.\omega\mathrm{sen}(\omega.\mathrm{t} + \varphi_0) \end{array}\right\} \quad \text{Para determinar la frecuencia}: \omega = 2.\pi.\nu = 2.\pi\frac{5}{\pi} = 10\ rad.s^{-1}$$

Además, puesto que :

$$\left.\begin{array}{l} E_M = 1J \\ E_M = \frac{1}{2}K.A^2 \\ \left(K = m\omega^2 = 0´5.10^2 = 50N.m^{-1}\right) \end{array}\right\} \to \frac{1}{2}K.A^2 = 1 \to \frac{1}{2}.50.A^2 = 1 \to A^2 = \frac{1}{25} \to A = \frac{1}{5} = 0´2m$$

En el instante inicial :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}_{\mathrm{K,0}} : 0´2 = \frac{1}{2}.\mathrm{m.v}_0{}^2 \to 0´2 = \frac{1}{2}.0´5.\mathrm{v}_0{}^2 \to \mathrm{v}_0 = \sqrt{0´8}\ m.s^{-1} \\ \mathrm{E}_{\mathrm{P,E,0}} : 0´8 = \frac{1}{2}\mathrm{K.y}^2 \to 0´8 = \frac{1}{2}.50.\mathrm{y}^2 \to y = 0´179m \end{array}\right.$$

Por lo tanto, si sustituimo s en y :

$$y = A.\cos(\omega.t + \varphi_0) \to 0´179 = 0´2.\cos(0 + \varphi_0) \to \cos\varphi_0 = \frac{0´179}{0´2} = 0´895 \to \varphi_0 = 0´462\ rad$$

La ecuación de la vibración será entonces :

$$y = 0´2.\cos(10.t + 0´462)$$

Para determinar la velocidad máxima,

$$\mathrm{v} = -\mathrm{A}.\omega\mathrm{sen}(\omega.\mathrm{t} + \varphi_0) \to \mathrm{v}_{\mathrm{MAX}} = \mathrm{A}.\omega = 0´2.10 = 2m.s^{-1}$$

$$(\text{ó}\ \ \mathrm{E}_{\mathrm{K,MAX}} = 1 \to \mathrm{E}_{\mathrm{K,MAX}} = \frac{1}{2}.\mathrm{m.v}^2 \to 1 = \frac{1}{2}.0´5.\mathrm{v}^2 \to \mathrm{v} = \sqrt{4} = 2m.s^{-1})$$

b1) El MAS se inicia en un punto en el que existe una fase inicial de 0´462 rad. Es decir, en el inicio de tiempos la energía mecánica asociada corresponde a la suma de energía potencial elástica más energía cinética. La suma de ambas resulta ser de 1 Julio. Este valor se mantendrá constante durante todo el proceso, puesto que, en ausencia de fuerzas externas, el sistema será conservativo.
A partir de los datos del enunciado, es imposible conocer si la vibración continuará hasta alcanzar la amplitud, o si por el contrario, se dirige hacia la posición de equilibrio.

b2)
Independientemente de esta pequeña apreciación, durante el transcurso de la vibración, se irán produciendo sucesivos intercambios de energía entre las formas cinética y potencial elástica, siempre recordando que el valor total en cualquier punto habrá de ser 1J (conservación energía para sistemas conservativos).
Resulta importante reseñar que en los puntos correspondientes a la elongación, la energía potencial elástica será máxima y nula, por tanto, la energía cinética. Por el contrario, cuando x=0, es la energía potencial elástica quien ahora resulta ser nula; en este caso, la energía cinética asociada alcanzará su valor máximo.

b2) Cuando la energía cinética y la potencial elástica son iguales:

$$\left\{\begin{array}{l} E_K = \frac{1}{2}.K.(A^2 - y^2) \\ E_{P,E} = \frac{1}{2}K.y^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}.K.(A^2 - y^2) = \frac{1}{2}K.y^2 \rightarrow \frac{1}{2}.K.A^2 - \frac{1}{2}.K.y^2 = \frac{1}{2}K.y^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}.K.A^2 - \frac{1}{2}.K.y^2 = \frac{1}{2}K.y^2 \rightarrow \frac{1}{2}.K.A^2 = K.y^2 \rightarrow y^2 = \frac{1}{2}.A^2 \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}.A \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}.A \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}.0´2 = 0´141\,\text{m}$$

10. La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación:

$$y(x, t) = 0'01\text{sen}(10\pi x).\cos(200\pi t) \text{ (en unidades S.I.)}$$

a) Indique de qué tipo de onda se trata y calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición puede dar lugar a dicha onda.
b) ¿Cuál es la energía de una partícula de la cuerda situada en el punto x = 10 cm?. Razone la respuesta.

a) Se trata de una onda estacionaria.

Su ecuación general sería
$$y(x, t) = 2.A.\text{sen}(kx).\cos(\omega.t)$$
$$y(x, t) = 0'01\text{sen}(10\pi.x).\cos(200\pi.t)$$

Comparando:

$$\begin{bmatrix} 2.A = 0'01 \rightarrow A = 5.10^{-3}\,m \\ k = 10.\pi \rightarrow \dfrac{2.\pi}{\lambda} = 10.\pi \rightarrow \dfrac{2.\pi}{10.\pi} = \lambda \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{5}m \\ \omega = 200.\pi \rightarrow 2.\pi.\nu = 200.\pi \rightarrow \nu = 100 \text{ Hz} \end{bmatrix} \rightarrow v_{PROPAG} = \lambda.\nu = 100.\frac{1}{5} = 20\,m.s^{-1}$$

b) $y(0'1, t) = 0'01\text{sen}(10\pi.0'1).\cos(200\pi.t) = y(0'1, t) = 0'01\text{sen}(\pi).\cos(200\pi.t) = 0$

Se trata, entonces de un NODO. Estos puntos se caracterizan, para una onda estacionaria por no poseer MAS. Por tanto, al ser un punto carente de vibración , con valor de y=0, no tendrá asociada ningún tipo de energía, sea potencial elástica o cinética.

Otra demostración podría basarse en la velocidad de vibración. Si derivamos la ecuación de onda respecto al tiempo:

$$y(x, t) = 2.A.\text{sen}(kx).\cos(\omega.t)$$
$$v_{vib} = \frac{dy}{dt} = -0'01.200\pi.\text{sen}(10\pi.x).sen(200\pi.t) \rightarrow$$
$$v_{vib} = -2\pi.\text{sen}(10\pi.x).sen(200\pi.t)$$

En un punto en el que x=0´1m:

$$v_{vib} = -2\pi.\text{sen}(10\pi.0'1).sen(200\pi.t) = -2\pi.\text{sen}(\pi).sen(200\pi.t) = 0$$

con lo que, de nuevo, queda demostrado que en este punto (un nodo), no existe vibración.

11. La ecuación de una onda armónica en una cuerda tensa es:

$$y(x, t) = A\text{sen}(\omega t - kx)$$

a) Indique el significado de las magnitudes que aparecen en dicha expresión.
b) Escriba la ecuación de otra onda que se propaga en la misma cuerda, en sentido opuesto, de amplitud mitad y frecuencia doble que la anterior.

a)

$$\text{donde}: \begin{cases} y = \text{elongación, función de la posición del punto (x) y el tiempo. Se mide en metros} \\ A = \text{amplitud o elongación máxima (en metros)} \\ \omega = \text{frecuencia angular } (\text{rad.s}^{-1}).\ \text{Es igual a}: \ \omega = 2.\pi.\nu \\ k = \text{número de onda } (\text{m}^{-1}).\ k = \dfrac{2.\pi}{\lambda} \end{cases}$$

b)

$$y(x, t) = \frac{A}{2}.\text{sen}(2\omega.t + kx)$$

12. a) Explique las variaciones energéticas que se dan en un oscilador armónico durante una oscilación. ¿Se conserva la energía del oscilador? Razone la respuesta.
b) Si se duplica la energía mecánica de un oscilador armónico, ¿cómo varía la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones? Razone la respuesta.

a) Se considera un oscilador armónico a toda aquella partícula dotada de MAS.
Tanto posición como velocidad y aceleración de la partícula sujeta a este tipo de movimiento van a ir tomando los mismos valores para iguales intervalos de tiempo, denominados PERÍODOS (τ).
Cada partícula del medio en el que se propaga la onda poseerá una energía mecánica, suma de la energía potencial y la cinética:
Para el caso particular de una partícula que haya alcanzado la elongación máxima (y por tanto no sigue vibrando más allá, con lo que su velocidad es nula):

$$\text{Energía en elongación máxima}: \quad E_M = E_K + E_P = 0 + \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

Y, por último, para otra partícula en la posición de equilibrio:

$$\text{Energía en elongación nula}: \quad E_M = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Energía en cualquier punto}: \quad E_M = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Si suponemos el caso en el que no existen fuerzas no conservativas (disipativas), la energía mecánica deberá permanecer constante.

Comparando ahora el caso en el que la elongación es máxima con aquella otra correspondiente a un punto cualquiera:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Energía en elongación máxima}: \quad E_M = \frac{1}{2}KA^2 \\ \text{Energía en cualquier punto}: \quad E_M = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2\end{array}\right\}$$

$$E_M = E_K + E_P \rightarrow E_K = E_M - E_P$$

Es decir:

$$E_K = \frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}K\left(A^2 - x^2\right)$$

Pero, recordando que, para un MAS:

$$\left\{\begin{array}{l} x = A.\cos\omega t \\ v = \frac{dx}{dt} = -A.\omega.sen\omega t \end{array}\right\} \rightarrow E_K = \frac{1}{2}.m.(-A.\omega.sen\omega.t)^2 = \frac{1}{2}.m.A^2.\omega^2.sen^2\omega.t =$$

$$= \frac{1}{2}.m.A^2.\omega^2.\left[1-\cos^2\omega.t\right] = \frac{1}{2}.m..\omega^2\left(A^2 - A^2.\cos^2\omega.t\right) = \frac{1}{2}.K\left(A^2 - x^2\right)$$

(Como ya sabíamos)

b)
Así, como ya se ha dicho:

$$E_M = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(m.\omega^2)A^2 = \frac{1}{2}m.(2.\pi.\nu)^2 A^2 = 2m\pi^2\nu^2A^2$$

La modificación de la amplitud conllevará a un cambio de la amplitud.

$$\left.\begin{array}{l} E_{M1} = \frac{1}{2}KA_1^2 \\ E_{M2} = \frac{1}{2}KA_2^2 \rightarrow 2E_{M1} = \frac{1}{2}KA_2^2 \end{array}\right\} 2.\left(\frac{1}{2}KA_1^2\right) = \frac{1}{2}KA_2^2 \rightarrow 2A_1^2 = A_2^2 \rightarrow A_2 = \sqrt{2}.A_1.$$

Por otro lado:

$$E_{M1} = 2m\pi^2\nu_1^2A_1^2$$
$$E_{M2} = 2m\pi^2\nu_2^2A_2^2 = 2m\pi^2\nu^2.(2A_1^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{M1} = 2m\pi^2\nu_1^2A_1^2 \\ E_{M2} = 2.E_{M1} \rightarrow 2m\pi^2\nu_2^2A_2^2 = 4m\pi^2\nu_1^2A_1^2 \end{array}\right\} \rightarrow \nu_2^2A_2^2 = 2\nu_1^2A_1^2 \rightarrow \nu_2^2(2.A_1^2) = 2\nu_1^2A_1^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu_2^2(2.A_1^2) = 2\nu_1^2A_1^2 \rightarrow \nu_2^2 = \nu_1^2 \rightarrow \nu_2 = \nu_1$$

Como vemos, la frecuencia se mantiene constante

13. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es:

$$y(x,t) = 0'06\cos 2\pi(4t - 2x) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Calcule la diferencia de fase entre los estados de vibración de una partícula de la cuerda en los instantes t = 0 y t = 0'5 s

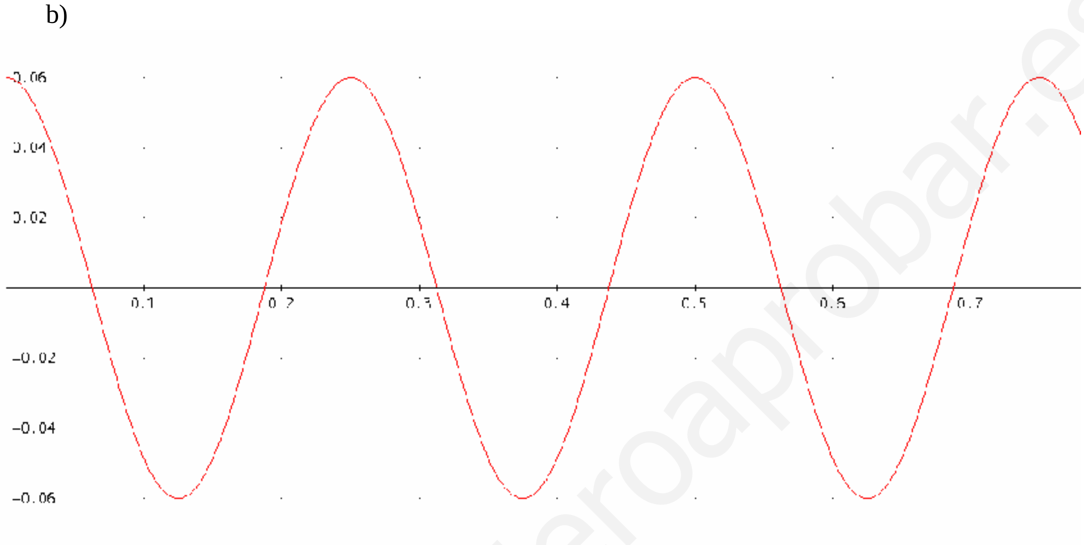
b) Haga una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en los instantes anteriores.

$y(x, t) = 0'06\cos(8.\pi.t - 4.\pi.x)$

a) La diferencia de fase entre dos instantes para una misma partícula será:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (8.\pi.t_2 - 4.\pi.x) - (8.\pi.t_1 - 4.\pi.x) = 8.\pi(t_2 - t_1) = 8.\pi.0'5 = 4.\pi \ \text{rad}$$

b)



14. Una antena emite una onda electromagnética de frecuencia 50 kHz. a) Calcule su longitud de onda. b) Determine la frecuencia de una onda sonora de la misma longitud de onda.
$c = 3.10^8$ ms-1; v_s = 340 ms-1

La velocidad de propagación de una onda viene dada por la ecuación:

$v_{PROPAG} = \lambda.\nu$, donde λ, ν representan, respectivamente la longitud de onda y la frecuencia asociadas.

Por tratarse de una radiación electromagnética, con la capacidad para viajar por el vacío, la velocidad de desplazamiento resulta ser de 3.10^8 m.s^{-1} (en el vacío).

Puesto que la frecuencia asociada es de 50.10^3Hz, la longitud de onda correspondiente será :

$$v_{PROPAG} = \lambda.\nu \rightarrow 3.10^8 = \lambda.5.10^4 \rightarrow \lambda = \frac{3.10^8}{5.10^4} = 6000\,m$$

Si se tratase de una onda sonora, la diferencia con el caso anterior es que este tipo de ondas (mecánicas) tiene una velocidad de propagación de 340m.s^{-1}. Así pues:

$$v_{PROPAG} = \lambda.\nu \rightarrow 340 = \lambda.5.10^4 \rightarrow \lambda = \frac{340}{5.10^4} = 6'8.10^{-3}\,m$$

15. El periodo de una onda que se propaga a lo largo del eje X es de 3.10^{-3} s y la distancia entre los dos puntos más próximos cuya diferencia de fase es π/2 rad es 20 cm. A) Calcule la longitud de onda y la velocidad de propagación. B) Si el período se duplicase, ¿qué le ocurriría a las magnitudes del apartado anterior?

a)

$$\begin{cases} \tau = 3.10^{-3}\,\text{sg} \\ \Delta x(\text{para } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}) = 0´2\text{m} \end{cases}$$

Esos dos puntos cumplen la condición:

$$k.(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow x_2 - x_1 = .\frac{\lambda}{4} \rightarrow \lambda = 4.(x_2 - x_1) = 0´8m$$

Puesto que sabemos que: $\tau = 3.10^{-3}\,sg$

, la velocidad de propagación de la onda será:

$$v_{\text{PROPAG}} = \lambda.\nu = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{0´8}{3.10^{-3}} = 266´67 m.s^{-1}$$

b) $\tau = 6.10^{-3}\,\text{sg}$

Considerando invariable la propagación de la onda en el medio, resultará que un aumento de l valor del período de vibración irá aparejado de una disminución de la longitud de onda asociada. De este modo:

$$v_{\text{PROPAG}} = \lambda.\nu = 266´67 m.s^{-1} = \frac{\lambda}{\tau} \rightarrow \lambda = 266´67 \times 6.10^{-3} = 1´6\ m$$

16. a) Explique la periodicidad espacial y temporal de las ondas y su interdependencia.
c) Una onda de amplitud A, frecuencia ν y longitud de onda λ, se propaga por una cuerda. Describa el movimiento de una partícula de la cuerda, indicando sus magnitudes características.

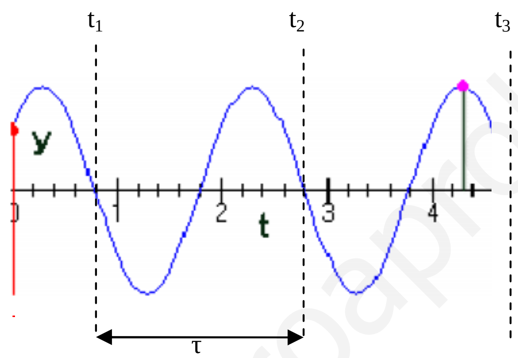
a) La ecuación de onda muestra su doble periodicidad: es función de t y x

$$y(x,t) = A.\cos(\omega t - kx)$$

✓ ***Las posiciones de alejamiento respecto a la posición de equilibrio se repiten periódicamente con el paso del tiempo para cualquier punto determinada de la onda.***
Así, para un valor fijo de x (constante), la onda es armónica respecto a la otra variable, el tiempo:

$$y(t) = A.\cos(\omega t) = A.\cos\left(\frac{2\pi.t}{\tau} - cte\right)$$

Si representamos los valores de la elongación (en un punto cualquiera) para distintos valores de t, obtendremos la siguiente gráfica:



De la gráfica podemos ver que, para dos instantes t1 y t2, separados por un intervalo de tiempo igual a un período, el punto vuelve a alcanzar el mismo estado de vibración. Sin realizar desarrollos trigonométricos, lo anterior equivale, matemáticamente, a:

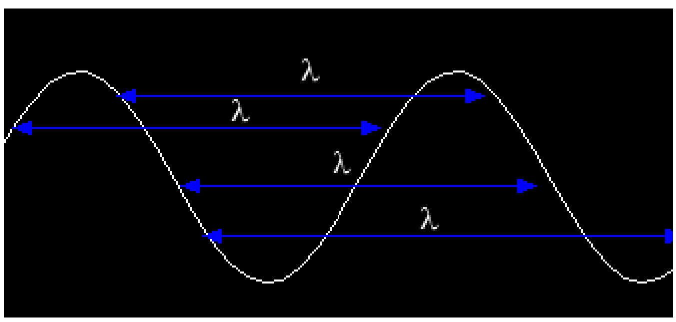
$$(\omega t_2 - kx) - (\omega t_1 - kx) = 2\pi.n \qquad \text{(la diferencia de fases debe ser múltiplo entero de } 2\pi)$$

$$(\omega t_2 - \omega t_1) = 2\pi.n \rightarrow \omega.(t_2 - t_1) = 2\pi.n \rightarrow .(t_2 - t_1) = \frac{2\pi.n}{\omega} \rightarrow .(t_2 - t_1) = \frac{2\pi.n}{2\pi.\nu} \rightarrow$$

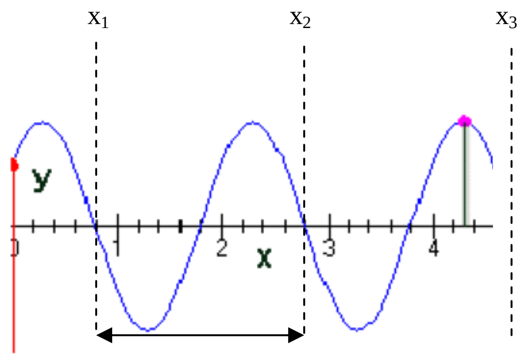
$$\rightarrow .(t_2 - t_1) = \frac{n}{\nu} \rightarrow \boxed{(t_2 - t_1) = n.\tau}$$

Lo que nos demuestra que el estado de vibración de un punto de una onda se repite cada período.

✓ ***Las posiciones de los puntos de una cuerda se repiten periódicamente a una distancia igual a la longitud de onda de cada punto.***
Esto lo vemos si "congelamos el tiempo" sacándole una foto al movimiento ondulatorio. En la onda obtenida se ve la posición de cada punto se repite a una distancia λ de él.



La representación de la función y frente a x es como la foto instantánea de una cuerda vibrando. Las posiciones de la cuerda en determinado instante se reflejan en la siguiente gráfica:



De la gráfica podemos ver que, para dos puntos $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ (y para un mismo tiempo), separados por una distancia igual a una longitud de onda, se vuelve a alcanzar el mismo estado de vibración. Sin realizar desarrollos trigonométricos, lo anterior equivale, matemáticamente, a:

$(\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = 2\pi.$ (la diferencia de fases debe ser múltiplo entero de 2π)

$$kx_2 - kx_1 = 2\pi.n \rightarrow k(x_2 - x_1) = 2\pi.n \rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{2\pi.n}{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{2\pi.n}{(2\pi/\lambda)} \rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{2\pi.n}{(2\pi/\lambda)} \rightarrow \boxed{(x_2 - x_1) = n\lambda}$$

Demostrando que el estado de vibración de dos puntos de una onda en un mismo instante se repite cada longitud de onda.

Por otro lado, al relacionar $(x_2 - x_1) = n\lambda$ con $(t_2 - t_1) = n.\tau$, tendremos:

$$\frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{n\lambda}{n.\tau} \rightarrow v_{PROPAG} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda.\nu$$

Es decir, la relación entre ambas expresiones nos indica la velocidad a la que la onda es capaz de propagarse en el medio por el que se desplaza.

b)

En el punto en el que se origina la perturbación (foco), la vibración puede expresarse como:

$$y_{0,t} = A.\cos \omega t$$

(Obsérvese que para t=0, $y_{0,0} = A$; es decir, se considera el comienzo del MAS en el punto de elongación máxima)

Como se ha dicho, cada punto del medio repite la perturbación con un cierto retraso que llamaremos **t´**, dependiente de la distancia de dicho punto al foco, y de la velocidad de propagación de la onda. Al considerar un desplazamiento con rapidez constante:

$$x = v_{prop}.t' \rightarrow t' = \frac{x}{v_{prop}}$$

En un punto **O**, alejado del foco, la vibración llevará asociada tal retraso. Por lo tanto, el ertado de vibración de **O** en el tiempo **t** será el correspondiente a **t-t´**.

Luego:

$$y(x,t) = A.\cos\omega(t - t') = A.\cos\omega\left(t - \frac{x}{v_{prop}}\right) = A.\cos\omega\left(t - \frac{x}{\lambda\nu}\right) = A.\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{\lambda\nu}\right) =$$

$$= A.\cos\left(\omega t - \frac{2\pi\nu.x}{\lambda\nu}\right) = A.\cos\left(\omega t - \frac{2\pi.x}{\lambda}\right) = A.\cos(\omega t - kx)$$

$$y(x,t) = A.\cos(\omega t - kx)$$

17. Se hace vibrar transversalmente un extremo de una cuerda de gran longitud con un período de 0,5 π s y una amplitud de 0,2 cm, propagándose a través de ella una onda con una velocidad de 0,1 m s-1.

    a) Escriba la ecuación de la onda, indicando el razonamiento seguido.

    b) Explique qué características de la onda cambian si: i) se aumenta el período de la vibración en el extremo de la cuerda; ii) se varía la tensión de la cuerda.

a) La ecuación de una onda transversal que se propaga por un medio material (en nuestro caso la cuerda), hacia siguiendo el sentido de las abscisas positivas viene dada por la ecuación:

$$y = A.\cos(\omega.t - k.x)$$

donde :

A = amplitud o elongación máxima (la distancia máxima de separación respecto a la posi - ción de equilibrio. Se mide en metros.

En nuestro caso, $A = 0'2.10^{-2}\,m.$

Por otro lado :

ω = frecuencia angular (rad.s^{-1}). Además : $\omega = 2.\pi.\nu = \frac{2.\pi}{\tau} \rightarrow \omega = \frac{2.\pi}{0'5.\pi} = 4\,rad.s^{-1}$

Y por último :

$$k = \frac{2.\pi}{\lambda}$$

Sucede , sin embargo, que desconocemos el valor de la longitud de onda.
Para determinarlo, hemos de recurrir a la ecuación que nos relaciona la velocidad de propagación de la onda con la frecuencia y la longitud de onda. Esta es:

$$v_{PROPAG} = \lambda.\nu = \frac{\lambda}{\tau} \rightarrow 0'1 = \frac{\lambda}{0'5.\pi} \rightarrow \lambda = 0'05.\pi\ \text{m}$$

Tenemos pues todas las variables que participan en la ecuación de una onda. Entonces:

$$y = 2.10^{-3}.\cos(4.t - \frac{2.\pi}{0'05.\pi}.x) \rightarrow y = 2.10^{-3}.\cos(4.t - 40.x)$$

b) Un aumento en el período de vibración supondría, por un lado, una disminución de la frecuencia de la onda. Puesto que la energía asociada a una onda es proporcional, entre otros, a su frecuencia, ello supondría una menor energía de la onda.
Además, puesto que $v_{PROPAG} = \lambda.\nu$, y teniendo en cuenta la invariabilidad de la rapidez de propagación de la onda, la disminución de ν supondrá un aumento de λ .

c) Para comprender qué sucede en la cuerda si se modifica la tensión, necesitaremos explicitar la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} v_{PROPAG} = \sqrt{\frac{T}{\eta}} \rightarrow \\ \text{, donde :} \\ T = \text{tensión de la cuerda (N)} \\ \eta = \text{densidad lineal (Kg.m}^{-1}\text{)} \end{array}\right\}$$

Puesto que, como hemos dicho, la velocidad de propagación de una onda es una magnitud invariable, la modificación de la tención de la cuerda debe ir acompañada de una modificación en el mismo sentido (es decir, proporcional) de su densidad lineal.

18. a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?
b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: y = 5 cos (10t + π/2) (SI) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

La ***Ley de Hooke*** da sentido matemático a la causa productora del MAS, siempre que el resorte no supere su límite de elasticidad (a partir del cual perdería sus propiedades elásticas). Esta ley se expresa matemáticamente como:

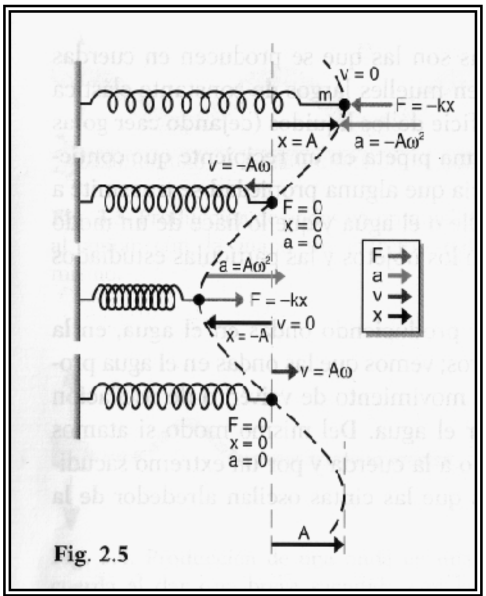


Fig. 2.5

Vectorialmente: $\vec{F} = -K.\Delta\vec{x}$

Escalarmente: $F = -K.\Delta x = -K.(x - x_0)$

$$\begin{bmatrix} \text{K} = \text{constante elástica (N.m}^{-1}\text{)} \\ \text{F} = \text{fuerza elástica o deformadora (N)} \\ \text{x} = \text{longitud inicial (m)} \\ \text{x}_0 = \text{longitud final (m)} \end{bmatrix}$$

Analicemos ahora el caso en el que un muelle se halla asociado a una masa m. Si se estira el muelle cierta longitud y posteriormente se suelta, se iniciará el MAS.

La única fuerza que actúa sobre la masa es la fuerza elástica (recuperadora) del muelle. El valor de esta fuerza viene dado, como ya se ha indicado más arriba, por la ley de Hooke:

$F = -K.x$ (suponiendo que $x_0 = 0$)

La aceleración provocada será:

$a = -\omega^2 x$

, y puesto que $F = ma \rightarrow F = -m.\omega^2.x = -m.\omega^2.A.\cos(\omega.t + \delta_0)$

Además:

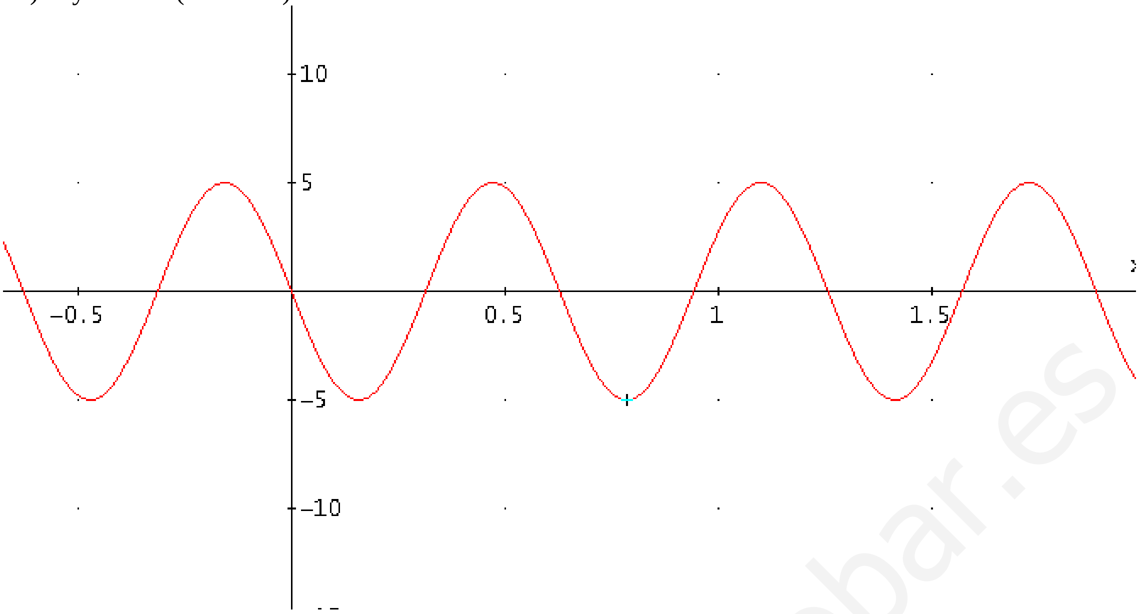
$$\left.\begin{aligned} &\text{F} = -\text{K.x} \\ &\text{a} = -\omega^2\text{x} \\ &\text{F} = \text{ma} \end{aligned}\right\} -\text{K.x} = \text{ma} \rightarrow -\text{K.x} = -\text{m}\omega^2\text{x} \rightarrow \text{K} = \text{m}\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\text{K}}{\text{m}}} \rightarrow 2\pi\nu = \sqrt{\frac{\text{K}}{\text{m}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{K}}{\text{m}}}}$$

$$\left(\text{Y puesto que } \tau = \frac{1}{\nu} \rightarrow \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\text{m}}{\text{K}}}\right)$$

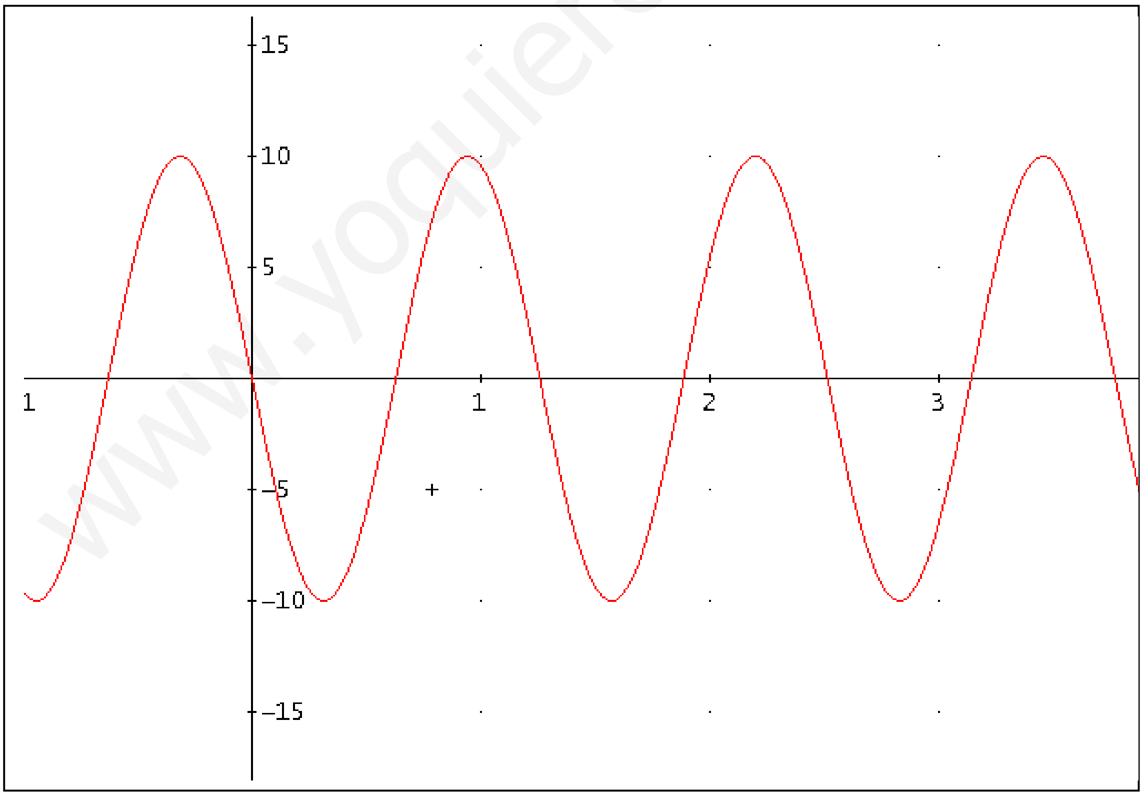
En cualquier caso, los movimientos se amortiguan a lo largo del tiempo, con lo que, llegado un momento, el movimiento se detiene, debido a pérdidas energéticas.

b1) y = 5 cos (10t + π/2)



t	0	0´079	0´159	0´313	0´472	0´631	0´786
y	0	-3´516	-5	0	5	0	-5

b2) y = 10 cos (5t + π/2)



t	0	0´119	0´309	0´627	0´944	1´254	1´571
y	0	-5´625	-10	0	10	0	-10

19. a) Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 0,4 m de longitud, sujeta por los dos extremos. Calcule la frecuencia fundamental de vibración, suponiendo que la velocidad de propagación de la onda es de 352 m s^{-1}.

b) Explique por qué, si se acorta la longitud de una cuerda en una guitarra, el sonido resulta más agudo.

a) Tanto en x=0 como en x=L , la amplitud resultante de la onda estacionaria producida debe ser nula.

Recordando que:

$$A_R = 2.A.senkx \rightarrow 0 = 2.A.senkx \rightarrow senkx = 0 \rightarrow kx = n.\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n.\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow x = n.\frac{\lambda}{2}$$

Considerando ahora la relación entre la longitud de onda y la frecuencia:

$$v_{PROPAG} = \lambda.\nu \rightarrow \lambda = \frac{v_{PROPAG}}{\nu}$$

Y, sustituyendo en $x = n.\frac{\lambda}{2}$, nos quedará:

$$x = n.\frac{v_{PROPAG}}{2.\nu} \rightarrow \nu = n.\frac{v_{PROPAG}}{2.x}$$

Y, como en nuestro caso x=L:

$$\nu = n.\frac{v_{PROPAG}}{2.L}$$

, expresión a partir de la que podemos determinar la frecuencia fundamental:

$$\text{Para } n = 1 \rightarrow \nu = \frac{v_{PROPAG}}{2L} = \frac{352}{2.0'4} = 440\,Hz$$

b) Si nos fijamos en la expresión:

$\nu = \nu = n.\frac{v_{PROPAG}}{2.L}$, vemos que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda (L).

Por tanto, si L se hace menor, la frecuencia aumentará; es decir, el sonido será más agudo.

20. a) Explique las diferencias entre ondas longitudinales y ondas transversales y ponga algún ejemplo de onda de cada tipo.
b) ¿Qué es una onda estacionaria? Comente sus características.

En función de la dirección de propagación, las ondas se clasifican en	
Ondas Longitudinales	Vibración y propagación tienen al misma dirección. Se trata de ondas de compresión-dilatación Ejemplo: Ondas de luz, Ondas P
Ondas Transversales	Vibración y propagación son perpendiculares. Ejemplo: Olas de mar, Ondas S

Este tipo de ondas surge, por ejemplo, al considerar la interferencia de dos ondas de iguales características que se desplazan en igual dirección pero de sentido contrario. La onda interferente resultante se conoce como ***ONDA ESTACIONARIA***.

Estas ondas surgirán sólo si las ondas iniciales cumplen con determinadas condiciones iniciales (entre otras, determinados valores de frecuencia).

Las ondas estacionarias se caracterizan por:

- ✓ La onda resultante (es decir, la ondas estacionaria) ***no viaja***. La ondulación no se desplaza, a diferencia de una onda libre.
- ✓ Existen puntos en los que la perturbación ***es siempre*** nula, como consecuencia de una interferencia destructiva. Son los ***NODOS***
- ✓ Asimismo, existen otros en los que, a consecuencia de una interferencia constructiva, la perturbación es máxima; son los ***VIENTRES***.
- ✓ En el caso en el que se halle limitado por ambos lados, no puede producirse cualquier onda, sino ***sólo las que originen nodos en los extremos fijos del medio.***

Matemáticamente:

$$y_1 = A.\cos\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right) = A.\text{sen}\left(\omega t + kx\right) \quad \text{(Puesto que la onda parte del punto de equilibrio)}$$

Al chocar contra la pared la onda reflejada invierte su fase. Así:

$$y_2 = A.\text{sen}\left(\omega t - kx + \pi\right) = -A.\text{sen}\left(\omega t - kx\right)$$

La onda resultado de la interferencia será:

$$y = y_1 + y_2 = A.\text{sen}\left(\omega t + kx\right) - A.\text{sen}\left(\omega t - kx\right) = A.\left[\text{sen}\left(\omega t + kx\right) - \text{sen}\left(\omega t - kx\right)\right]$$

Y ahora, conociendo la expresión:

$$senA - senB = 2.\cos\frac{A+B}{2}\,sen\frac{A-B}{2}$$

Tendremos, para nuestro caso:

$$y = A.\left[\text{sen}\left(\omega t + kx\right) - \text{sen}\left(\omega t - kx\right)\right] = 2.A.\left[\cos\frac{\left(\omega t + kx\right) + \left(\omega t - kx\right)}{2}.sen\frac{\left(\omega t + kx\right) - \left(\omega t - kx\right)}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2.A.\cos\omega t.senkx$$

La expresión: $y = 2.A.\cos\omega t.senkx$

, constituye la ecuación de una onda estacionaria.

Llamando A_R:

$A_R = 2.A.\text{sen}\,kx$ (,independiente del tiempo, pero variable para en función de x)

, su valor será mínimo (A_R=0), cuando:

$$senkx = 0 \rightarrow kx = n.\pi \rightarrow \frac{2.\pi}{\lambda}.x = n.\pi \rightarrow x = n.\frac{\lambda}{2}$$, que nos indica la posición de los vientres.

La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \text{n}.\frac{\lambda}{2} \\ x_2 &= (\text{n}+1).\frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\}\Delta x = \left[(\text{n}+1).\frac{\lambda}{2}\right] - \left[\text{n}.\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}$$

Por otro lado, el valor de A_R será máxima (A_R=2A) cuando:

$$\text{s}enk\text{x} = \pm 1 \rightarrow \text{kx} = (2\text{n}+1).\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2.\pi}{\lambda}.x = (2\text{n}+1).\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2\text{n}+1).\frac{\lambda}{4}$$

La distancia entre dos vientres consecutivos será:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (2\text{n}+1).\frac{\lambda}{4} \\ x_2 &= (2(\text{n}+1)+1).\frac{\lambda}{4} \end{aligned}\right\}\Delta x = \left[(2(\text{n}+1)+1).\frac{\lambda}{4}\right] - \left[(2\text{n}+1).\frac{\lambda}{4}\right] = \frac{\lambda}{2}$$

Por último, la distancia entre nodo y vientre será:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Nodo :} & \text{x}_1 &= \text{n}.\frac{\lambda}{2} \\ &\text{Vientre :} & \text{x}_2 &= (2\text{n}+1).\frac{\lambda}{4} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{x}_2 - \text{x}_1 = (2\text{n}+1).\frac{\lambda}{4} - \text{n}.\frac{\lambda}{2} = (2(\text{n}+1)).\frac{\lambda}{4} - \text{n}.\frac{2\lambda}{4} =$$

$$= [2n+1-2n].\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

21. Por una cuerda se propaga un movimiento ondulatorio caracterizado por la función de onda:

$$y = Asen2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right)$$

Razone a qué distancia se encuentran dos puntos de esa cuerda si:

a) La diferencia de fase entre ellos es de π radianes.

b) Alcanzan la máxima elongación con un retardo de un cuarto de periodo.

$$y = \text{Asen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) = \text{Asen}\left(\frac{2.\pi.x}{\lambda} - \frac{2.\pi.t}{\tau}\right)$$

a) Recordando que el término encerrado entre paréntesis se conoce como fase:

$$\varphi = \left(\frac{2.\pi.x}{\lambda} - \frac{2.\pi.t}{\tau}\right)$$

La diferencia de fase entre dos puntos (para un mismo instante) será:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \left(\frac{2.\pi.x_1}{\lambda} - \frac{2.\pi.t}{\tau}\right)\\ \varphi_2 &= \left(\frac{2.\pi.x_2}{\lambda} - \frac{2.\pi.t}{\tau}\right)\end{aligned}\right\}\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{2.\pi.x_2}{\lambda} - \frac{2.\pi.t}{\tau}\right) - \left(\frac{2.\pi.x_1}{\lambda} - \frac{2.\pi.t}{\tau}\right)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{2.\pi.x_2}{\lambda}\right) - \left(\frac{2.\pi.x_1}{\lambda}\right) = \frac{2.\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right)$$

Siendo esta diferencia, según nos indica el enunciado del problema, igual a π radianes. Luego :

$$\frac{2.\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) = \pi \rightarrow \left(x_2 - x_1\right) = \frac{\lambda}{2}m$$

b) En este caso:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \left(\frac{2.\pi.x_1}{\lambda} - \frac{2.\pi.t_1}{\tau}\right)\\ \varphi_2 &= \left(\frac{2.\pi.x_2}{\lambda} - \frac{2.\pi.t_2}{\tau}\right)\end{aligned}\right\}\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{2.\pi.x_2}{\lambda} - \frac{2.\pi.t_2}{\tau}\right) - \left(\frac{2.\pi.x_1}{\lambda} - \frac{2.\pi.t_1}{\tau}\right)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{2.\pi.\pi_2}{\lambda} - \frac{2.\pi.\pi_1}{\lambda}\right) - \left(\frac{2.\pi.\pi_1}{\tau} - \frac{2.\pi.\pi_2}{\tau}\right) = \frac{2.\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{2.\pi}{\tau}\left(t_1 - t_2\right)$$

Siendo esta diferencia, según nos indica el enunciado del problema, $\left(t_1 - t_2\right) = \frac{\tau}{4}$. Luego :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2.\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{2.\pi}{\tau}\left(t_1 - t_2\right) = \frac{2.\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{2.\pi}{\tau}.\frac{\tau}{4}$$

Y si esos dos puntos poseen la misma elongación :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2.\pi$$

Igualando las dos últimas expresiones :

$$\frac{2.\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{2.\pi}{\tau}.\frac{\tau}{4} = 2.\pi \rightarrow \frac{1}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{1}{\tau}.\frac{\tau}{4} = 1 \rightarrow \frac{1}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(x_2 - x_1\right) = \frac{\lambda}{4}$$

22. Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\,\pi^2\,x$.
   a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.
   b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

a) A=0´1m

$$a = -16.\pi^2.x$$

Para determinar la ecuación asociada a la onda

$$\left.\begin{array}{l} a = -A.\omega^2.x \\ a = -16.\pi^2.x \end{array}\right\} \rightarrow A.\omega^2 = 16.\pi^2 \rightarrow A.\omega^2 = -16.\pi^2$$

Y puesto que A=0´1m:

$$\left.\begin{array}{l} a = -A.\omega^2.x \\ a = -16.\pi^2.x \end{array}\right\} \rightarrow A.\omega^2 = 16.\pi^2 \rightarrow A.\omega^2 = 16.\pi^2$$

$$0´1.\omega^2 = 16.\pi^2 \rightarrow \omega^2 = 160.\pi^2 \rightarrow \omega = \sqrt{160}.\pi \quad \text{rad.s}^{-1}$$

Luego :

$$y = A.\cos(\omega.t + \varphi_0)$$
$$y = 0´1.\cos(\sqrt{160}.\pi.t + \varphi_0)$$

23. La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}4\,sen(12.\pi.x)\cos(40.\pi.t)$$

a) Explique las características de la onda y calcule su período, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos con amplitud cero

$$y(x,t) = 0{,}4\,sen(12.\pi.x)\cos(40.\pi.t)$$

a) Se trata de una onda estacionaria, cuyas características son:

$$\left.\begin{cases} A = 0{'}4\,m \\ k = 12\pi \rightarrow \dfrac{2.\pi}{\lambda} = 12\pi \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{6}\,m \\ \omega = 40.\pi \rightarrow 2.\pi.\nu = 40.\pi \rightarrow \nu = 20\,Hz \end{cases}\right\} \rightarrow v_{PROPAG} = \lambda.\nu = \frac{1}{6}.20 = \frac{20}{6}\,m.s^{-1}$$

b) La ecuación de una onda estacionaria viene dada por la expresión:

$$y(x,t) = 2A\,sen(k.x)\cos(\omega.t)$$

La amplitud de la onda viene dada por:

$$A_R = 2A\,sen(k.x)$$

Supongamos los dos puntos consecutivos de amplitud nula:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \rightarrow A_R = 2A\,sen(k.x_1) \rightarrow 0 = sen(k.x_1) \\ x_2 \rightarrow A_R = 2A\,sen(k.x_2) \rightarrow 0 = sen(k.x_2) \end{matrix}\right\} k.x_2 - k.x_1 = n.\pi \rightarrow k.(x_2 - x_1) = n.\pi$$

$$\frac{2.\pi}{\lambda}.(x_2 - x_1) = n.\pi \rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{n.\lambda}{2}$$

Puesto que los dos puntos son consecutivos, n=1:

$$(x_2 - x_1) = \frac{n.\lambda}{2} \rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{12}\,m$$

24. La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y(x,t)=0{,}4\,\mathrm{sen}\,12\pi x\cos 40\pi t$$

a) Explique las características de la onda y calcule su período, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos con amplitud cero

b) La ecuación:

$$y(x,t)=0{,}4\,\mathrm{sen}\,12\pi x\cos 40\pi t$$

Corresponde a una onda estacionaria:

Este tipo de ondas surge, por ejemplo, al considerar la interferencia de dos ondas de iguales características que se desplazan en igual dirección pero de sentido contrario. La onda interferente resultante se conoce como ***ONDA ESTACIONARIA***.

Estas ondas surgirán sólo si las ondas iniciales cumplen con determinadas condiciones iniciales (entre otras, determinados valores de frecuencia).

Las ondas estacionarias se caracterizan por:

- ✓ La onda resultante (es decir, la ondas estacionaria) ***no viaja***. La ondulación no se desplaza, a diferencia de una onda libre.
- ✓ Existen puntos en los que la perturbación ***es siempre*** nula, como consecuencia de una interferencia destructiva. Son los ***NODOS***
- ✓ Asimismo, existen otros en los que, a consecuencia de una interferencia constructiva, la perturbación es máxima; son los ***VIENTRES***.
- ✓ En el caso en el que se halle limitado por ambos lados, no puede producirse cualquier onda, sino ***sólo las que originen nodos en los extremos fijos del medio.***

Matemáticamente:

$$y_1 = A.\cos\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right) = A.\mathrm{sen}\left(\omega t + kx\right)$$ (Puesto que la onda parte del punto de equilibri

Al chocar contra la pared la onda reflejada invierte su fase. Así:

$$y_2 = A.\mathrm{sen}\left(\omega t - kx + \pi\right) = -A.\mathrm{sen}\left(\omega t - kx\right)$$

La onda resultado de la interferencia será:

$$y = y_1 + y_2 = A.\mathrm{sen}\left(\omega t + kx\right) - A.\mathrm{sen}\left(\omega t - kx\right) = A.\left[\mathrm{sen}\left(\omega t + kx\right) - \mathrm{sen}\left(\omega t - kx\right)\right]$$

Y ahora, conociendo la expresión:

$$senA - senB = 2.\cos\frac{A+B}{2}\,sen\frac{A-B}{2}$$

Tendremos, para nuestro caso:

$$y = A.\left[\mathrm{sen}\left(\omega t + kx\right) - \mathrm{sen}\left(\omega t - kx\right)\right] = 2.A.\left[\cos\frac{\left(\omega t + kx\right)+\left(\omega t - kx\right)}{2}.sen\frac{\left(\omega t + kx\right)-\left(\omega t - kx\right)}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2.A.\cos\omega t.senkx$$

La expresión:

$$y = 2.A.\cos\omega t.senkx$$

, constituye la ecuación de una onda estacionaria.

Si comparamos la expresión particular de nuestra onda con la expresión general:

$$\left.\begin{array}{l} y(x,t) = A.senkx\cos\omega t \\ y(x,t) = 0{,}4sen12\pi x\cos 40\pi t \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0'4 \\ k = 12.\pi \\ \omega = 40.\pi \end{array}\right\}$$

Puesto que:

$$k = 12.\pi \rightarrow \frac{2.\pi}{\lambda} = 12.\pi \rightarrow \lambda = \frac{1}{6}\,\mathrm{m}$$

$$\omega = 40.\pi \rightarrow 2.\pi.\pi = 40.\pi \rightarrow \nu = 20\,\mathrm{Hz}$$

La velocidad de propagación será:

$$v_{PROPAG} = \lambda.\nu = \frac{1}{6}20 = \frac{20}{6}\,m.s^{-1}$$

c) Tenemos ahora que determinar la distancia entre dos nodos consecutivos. Para ello supondremos un tiempo cualquiera en la onda **t**.

Llamando A_R:

$$A_R = 2.A.\mathrm{sen}\, kx$$ (,independiente del tiempo, pero variable para en función de x)

, su valor será mínimo (A_R=0), cuando:

$$\mathrm{sen} kx = 0 \rightarrow kx = n.\pi \rightarrow \frac{2.\pi}{\lambda}.x = n.\pi \rightarrow x = n.\frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = n.\frac{\lambda}{2} \\ x_2 = (n+1).\frac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \Delta x = \left[(n+1).\frac{\lambda}{2}\right] - \left[n.\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}$$

, que nos indica la posición de los nodos.

La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = n.\frac{\lambda}{2} \\ x_2 = (n+1).\frac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \Delta x = \left[(n+1).\frac{\lambda}{2}\right] - \left[n.\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}$$

En nuestro caso:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{(1/6)}{2} = \frac{1}{12}m$$

a)

25. a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario.
b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

a) La ecuación que describe un MAS viene dada por la expresión:

$$x = A.\cos \omega t \qquad \begin{cases} x = \text{elongación (m)} \\ A = \text{Amplitud o elongación máxima (m)} \\ \omega = \text{frecuencia angular (rad.s}^{-1}\text{), igual a } \omega = 2.\pi.\nu \end{cases}$$

La rapidez con la que se realiza la vibración se obtendrá derivando temporalmente la posición. Así:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A.\cos \omega t) = -A.\omega\, sen\, \omega t$$

Si realizamos una segunda derivada temporal, obtendremos la expresión que nos indica la aceleración asociada al MAS. De este modo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-A\omega.\text{sen}\,\omega t) = -A\omega^2.\cos\omega t = -\omega^2.x$$

Como vemos, la aceleración será proporcional al desplazamiento (siendo ω^2 la constante de proporcionalidad) pero de sentido contrario a él.

b) $$x = A.\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \begin{cases} x = \text{elongación (m)} \\ A = \text{Amplitud o elongación máxima (m)} \\ \omega = \text{frecuencia angular (rad.s}^{-1}\text{), igual a } \omega = 2.\pi.\nu \\ \varphi_0 = \text{desfase o fase inicial (rad)} \end{cases}$$

Puesto que inicialmente, para t=0, el valor de la elongación es cero:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= A.\cos(\varphi_0) \end{aligned}\right\} \quad A.\cos(\varphi_0) = 0 \rightarrow \cos(\varphi_0) = 0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} rds$$

Luego la ecuación será:

$$x = A.\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Y la aceleración será:

$$a = -\omega^2.x = -\omega^2.A.\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$