

Problema 1 Sean $A(-1, -1)$, $B(3, -2)$ y $C(5, 3)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

- Calcular el cuarto vértice D .
- La longitud de sus lados.
- Los ángulos que forman.
- Su centro.
- Encontrar un vector de módulo 9 que sea perpendicular a \overrightarrow{AB} .

Solución:

- $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, -1) + (2, 5) = (1, 4)$.
- $|\overrightarrow{AB}| = |(4, -1)| = \sqrt{17}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2, 5)| = \sqrt{29}$
- $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{3}{\sqrt{17}\sqrt{29}} \implies \alpha = 82^\circ 14' 5''$ y $\beta = 97^\circ 45' 54''$
- $M \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = M(2, 1)$
- Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$ puede ser el vector $\vec{w} = (1, 4)$ y tendremos:

$$\vec{u} = \frac{9}{|\vec{w}|} \cdot \vec{w} = \left(\frac{9}{\sqrt{17}}, \frac{36}{\sqrt{17}} \right).$$

Problema 2 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1, -1)$, $B(2, 0)$ y $C(0, 5)$

Solución:

Dada la ecuación general de una circunferencia: $x^2 + y^2 + mx - ny + p = 0$, imponemos que pase por los puntos dados y nos queda

$$\begin{cases} m + n - p - 2 = 0 \\ 2m + p + 4 = 0 \\ 5n + p + 25 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m = \frac{11}{17} \\ n = -\frac{67}{17} \\ p = -\frac{90}{17} \end{cases}$$

La circunferencia buscada es: $x^2 + y^2 + \frac{11}{17}x - \frac{67}{17}y - \frac{90}{17} = 0$

Problema 3 Se pide:

a) Calcular la distancia del punto $A(2, -5)$ a la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$

b) Calcular el ángulo que forman las rectas

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} \text{ y } s : x - 2y + 1 = 0$$

Solución:

a) $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases} \implies x - y - 2 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 + 5 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

b) Tenemos $r : x + 2y + 1 = 0$ y $s : x - 2y + 1 = 0$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = -\frac{3}{5} \implies \alpha = 126^\circ 52' 11''$$

Problema 4 Dada la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$ encontrar los puntos de ella que distan 5 unidades del origen de coordenadas.

Solución:

La ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 es $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Además $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{cases}$, sustituyendo estos valores en la circunferencia

tenemos $\lambda^2 + 6\lambda - 23 = 0 \implies \lambda = 1,627105745$ y $\lambda = -2,827105745$.

Sustituyendo estos valores en la recta obtenemos los puntos:

$$(4.254211490, -2.627105745) \text{ y } (-4.654211489, 1.827105744)$$