Problema 1 *(2 puntos)* Hallar todos los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (-3,-4)$ que tengan módulo 20.

Solución:
Sea $\overrightarrow{v} = (x,y)$ un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (-3,-4)$. Lo primero que pensamos es que su producto escalar debe ser cero, es decir, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, como el espacio es ortonormal, nos quedaría que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-3,-4) \cdot (x,y) = -3x - 4y = 0$
Es trivial comprobar que, en esta ecuación, para cada valor que apliquemos a una de las variables obtendríamos otro valor para la otra. Me voy a limitar a las soluciones enteras.
Una solución posible sería $x = 4$ e $y = -3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (4,-3)$.
Otra solución posible sería $x = -4$ e $y = 3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (-4,3)$
Claro está, que estos vectores así obtenidos deben ser perpendiculares al vector $\overrightarrow{u}$, lo que nos queda es pasarlos a módulo 20. Para ello voy a seguir dos pasos, primero los pasaré a módulo 1 y luego los pasaré a módulo 20.
Para pasar $\overrightarrow{v}$ a módulo 1 aplicamos la siguiente fórmula: $v' = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$
Obtendríamos los siguientes vectores:
$\overrightarrow{v_1'} = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$
$\overrightarrow{v_2'} = (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$
Para pasarlos a módulo 20 lo único que tendremos que hacer es multiplicar por 20: y nos quedaría:
$\overrightarrow{w_1} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (16,-12)$
$\overrightarrow{w_2} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (-16,12)$

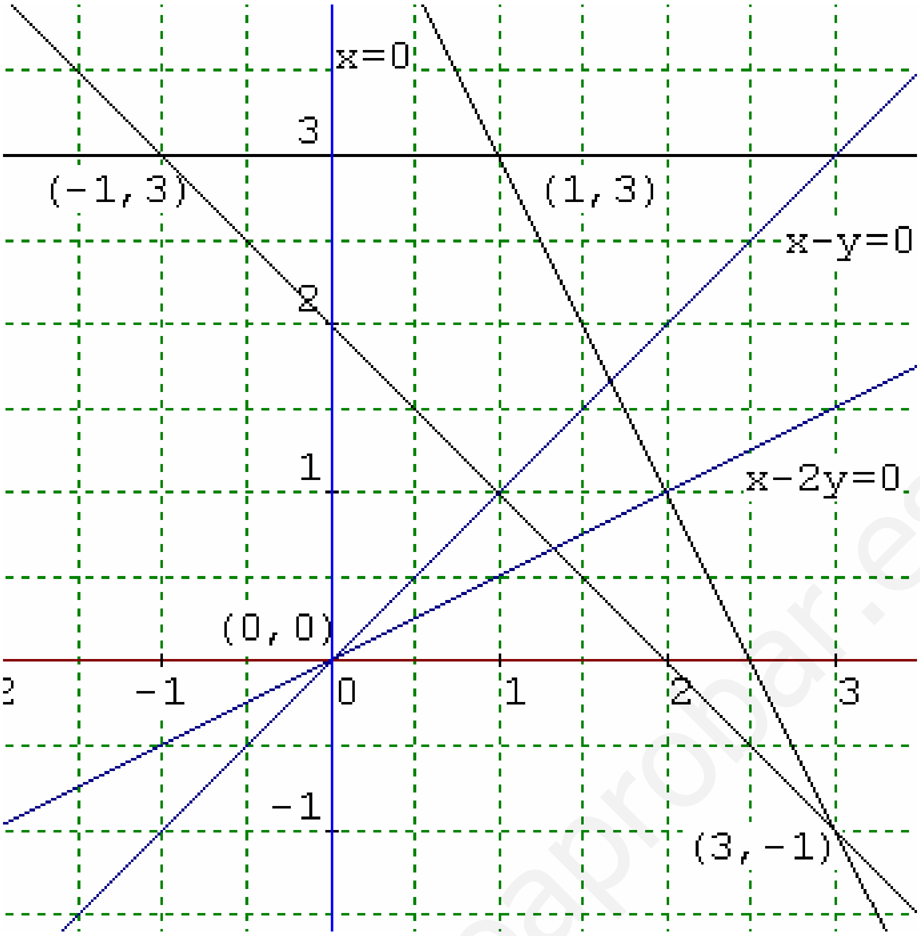
Problema 2 *(2 puntos)* Dado el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(3,-1)$, $C(-1,3)$ halla la ecuación de sus tres mediatrices y comprueba que se cortan en un único punto, llamado circuncentro.

Solución:

Si queremos calcular la mediatriz que separa a dos puntos podemos pensar de la siguiente manera: *la mediatriz entre dos puntos es el conjunto de puntos (x,y) tales que equidistan de los dos.* Es decir , entre los puntos A y B la mediatriz será el conjunto de puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,A) = d(P,B)$. Partiendo de este concepto es bastante sencillo la obtención de estas rectas.

Calculamos la mediatriz que hay entre A y B, es decir, $d(P,A) = d(P,B)$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$$
$$4x - 8y = 0 \Longrightarrow x - 2y = 0$$



Calculamos la mediatriz que hay entre B y C, es decir, $d(P,B) = d(P,C)$:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = (x+1)^2+(y-3)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1 = x^2+2x+1+y^2-6y+9$$

$$-8x+8y=0 \implies x-y=0$$

Calculamos la mediatriz que hay entre C y A, es decir, $d(P,C) = d(P,A)$:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2 = (x-1)^2+(y-3)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$

$$4x = 0 \implies x = 0$$

Es decir, las mediatrices serían: $x - 2y = 0$, $x - y = 0$ y $x = 0$. Ahora buscamos el punto de intersección. En este caso es bastante sencillo encontrarle ya que una de las ecuaciones es $x = 0$, y por simple sustitución comprobamos que el punto buscado(el circuncentro) es el origen de coordenadas $O(0, 0)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Calcula la distancia del punto $P(2, 3)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r:\ y = 3x - 2$
2. $r: \left\{ \begin{array}{lll} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{array} \right.$
3. $r:\ 3x + 4y - 5 = 0$

Solución:

1. $y = 3x - 2 \implies 3x - y - 2 = 0$ (Ecuación general de la recta)

   $$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

   $= 0,3162$

2. $$\left\{ \begin{array}{lll} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{array} \right. \implies t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \implies -x + 1 = 2y - 4 \implies$$

   $x + 2y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

   $$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

   $= 1,3416$

3. $3x + 4y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

   $$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcula el ángulo formado por las rectas:

1.

$$r_1: \; 3x - y + 1 = 0$$

$$s_1: \; 2x + 3y + 4 = 0$$

2.

$$r_1: \left\{\begin{array}{lll} \text{x=} & 2+ & \lambda \\ \text{y=} & 2- & 3\lambda \end{array}\right. \quad r_2: \; \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Solución:

1. Como las rectas están definidas por su ecuación general, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$

$= 0,2631 \implies \alpha = 74^o 44' 42''$

2.

$$r_1: \left\{\begin{array}{lll} \text{x=} & 2+ & \lambda \\ \text{y=} & 2- & 3\lambda \end{array}\right. \implies \lambda = \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} \implies 3x + y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$r_2: \; \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} \implies 2x - 3y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$

$= 0,2631 \implies \alpha = 74^o 44' 42''$

Problema 5 *(2 puntos)* Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$ en el punto $P(-1, 0)$

Solución:

Primero calculamos el centro de la circunferencia, ya que si obtenemos este punto, podremos calcular el vector que partiendo de este punto llega al punto donde queremos hallar la tangente, y este vector será perpendicular a la recta tangente:

$$3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0 \implies x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{5}{3} \cdot y - \frac{2}{3} = 0 \implies$$

$$m = -2 \cdot a \Longrightarrow \frac{1}{3} = -2 \cdot a \Longrightarrow a = -\frac{1}{6}$$
$$n = -2 \cdot b \Longrightarrow -\frac{5}{3} = -2 \cdot b \Longrightarrow b = \frac{5}{6}$$

Luego el centro de la circunferencia será $C(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$
Esto quiere decir que un vector perpendicular a la recta que nos piden será el vector $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{u} = (-1, 0) - (-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) = (-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$
Luego la ecuación general de la recta será de la forma $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + Cte = 0$, y teniendo en cuenta que esta recta pasa por el punto $P(-1, 0)$, sustituyendo obtendríamos $-\frac{5}{6} \cdot (-1) - \frac{5}{6} \cdot 0 + Cte = 0 \Longrightarrow Cte = -\frac{5}{6}$
La recta pedida sería, por tanto,$-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + (-\frac{5}{6}) = 0 \Longrightarrow x + y + 1 = 0$