Atención: *Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos.*

1) Sabiendo que $\alpha > 90º$ y que tg $\alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.
2) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 20 *m* en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.
3) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4$ *m*, $b = 7$ *m* y $A = 30º$.
4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º).
5) Demostrar la siguiente identidad: $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $\alpha > 90^o$ y que $\mathrm{tg}\ \alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

Si $\alpha > 90^o$ y $\mathrm{tg}\ \alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

Como $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{10}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{10}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{9}{10}} = -\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, donde el signo – se debe a que estamos en el tercer cuadrante.

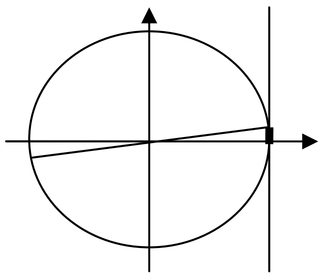
Por otra parte, $\mathrm{tg}\ \alpha = \dfrac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{\mathrm{sen}\ \alpha}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}} \Rightarrow \mathrm{sen}\ \alpha = -\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Las otras tres razones son:

$$\mathrm{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}\ \alpha} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10}$$

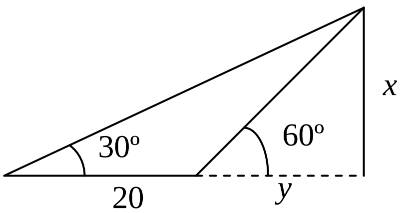
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\mathrm{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$$



Por último, como $\mathrm{tg}\ \alpha = 1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 18{,}43^o$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $\alpha = 180^o + 18{,}43^o = 198{,}43^o = 198^o\ 26'\ 5{,}8''$ (Ver figura).

2) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 20 *m* en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y, deducimos:

$$\mathrm{tg}\ 60^o = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\ \mathrm{tg}\ 60^o \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $20+y$, se tiene:

$$\mathrm{tg}\ 30^o = \frac{x}{20+y} \Rightarrow x = (20+y)\ \mathrm{tg}\ 30^o$$

Igualando:

$y\ \mathrm{tg}\ 60^o = (20+y)\ \mathrm{tg}\ 30^o = 20\ \mathrm{tg}\ 30^o + y\ \mathrm{tg}\ 30^o \Rightarrow y\ \mathrm{tg}\ 60^o - y\ \mathrm{tg}\ 30^o = 20\ \mathrm{tg}\ 30^o \Rightarrow$

$\Rightarrow y(\mathrm{tg}\ 60^o - \mathrm{tg}\ 30^o) = 20\ \mathrm{tg}\ 30^o \Rightarrow y = \dfrac{20\ \mathrm{tg}\ 30^o}{\mathrm{tg}\ 60^o - \mathrm{tg}\ 30^o} = 10$

Sustituyendo en (1): $x = 10\ \mathrm{tg}\ 60^o = 17{,}32\ m$

3) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4\ m$, $b = 7\ m$ y $A = 30^o$.

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7 \text{ sen } 30}{4} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ B = 61,04º ó B = 180º – 61,04º = 118,96º.

- Si B = 61,04º $\Rightarrow$ C = 180º – 61,04º – 30º = 88,96º. Y además:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{4 \text{ sen } 88{,}96^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 8{,}00\ m$$

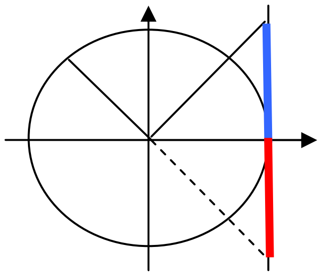
- Si B = 118,96º $\Rightarrow$ C = 180º – 118,96º – 30º = 31,04º. De modo que:

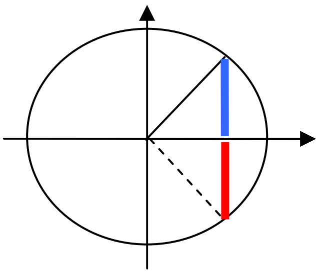
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{4 \text{ sen } 31{,}04^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 4{,}13\ m$$

4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º).

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: 1920º = 360º · 5 + 120º. Luego 1920º coincide, sobre la circunferencia, con 120º, después de dar 5 vueltas. Por tanto, tg 1920º = tg 120º.

Además tg 1920º = tg 120º = tg (180 – 60º) = – tg 60º = $-\sqrt{3}$





De la misma forma, 765 = 360 · 2 + 45º $\Rightarrow$ –765º coincide con –45º, después de dos vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: sen(–765º) = sen(–45º) = –sen(45º) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Demostrar la siguiente identidad: $\frac{\text{cosec } \alpha}{1 + \text{cotg}^2 \alpha} = \text{sen } \alpha$

Usando que $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ y que $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$, tenemos:

$$\frac{\text{cosec } \alpha}{1 + \text{cotg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\text{sen } \alpha}}{\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}} = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{sen } \alpha$$