

Geometría Analítica

Ejercicio nº 1.-

- Averigua el punto simétrico de $A(5, -1)$ con respecto a $B(4, -2)$.
- Halla el punto medio del segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(4, -2)$.

Ejercicio nº 2.-

- Halla el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(2, -5)$ con respecto al punto $B(-3, 2)$.
- Halla el simétrico de $A(2, -5)$ con respecto al punto $C(1, -4)$.

Ejercicio nº 3.-

- Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3, -2)$ y $Q(-1, 5)$.
- Halla el simétrico del punto $P(3, -2)$ con respecto a $Q(-1, 5)$.

Ejercicio nº 4.-

Considera los puntos $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ y $C(x, y)$. Halla los valores de x e y para que C sea:

- El punto medio del segmento de extremos A y B .
- El simétrico de A con respecto a B .

Ejercicio nº 5.-

Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

- Halla el punto medio del segmento de extremos A y B .
- Halla el simétrico de B con respecto a C .

Ejercicio nº 6.-

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A , sabiendo que $B(-3, 2)$.

Ejercicio nº 7.-

Dados los puntos $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(x, 3)$, determina el valor de x para que A , B y C estén alineados.

Ejercicio nº 8.-

Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 3)$.

Ejercicio nº 9.-

Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Ejercicio nº 10.-

Averigua las coordenadas del punto P , que divide al segmento de extremos $A(2, -4)$ y $B(1, 3)$ en dos partes tales que $\overline{AP} = 3\overline{PB}$.

Ejercicio nº 11.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y es paralela a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 12.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, 4)$.

Ejercicio nº 13.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $2x - y + 3 = 0$ y que pasa por el punto $P(4, 3)$.

Ejercicio nº 14.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

Ejercicio nº 15.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(-2, 8)$.

Ejercicio nº 16.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 6t \end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Ejercicio nº 17.-

Averigua la posición relativa de las rectas (si se cortan, averigua en qué punto):

$$r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 18.-

Determina la posición relativa de estas rectas. Si se cortan, di en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad x: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 19.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Ejercicio nº 20.-

Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}$$

Ejercicio nº 21.-

Averigua el ángulo formado por las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 22.-

Determina el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 23.-

Dadas las rectas r y s , determina el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

Ejercicio nº 24.-

Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$$

Ejercicio nº 25.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 6t \end{cases}$$

Ejercicio nº 26.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos $P(3, -1)$ y $Q(2, -4)$.

Solución:

Ejercicio nº 27.-

Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-2, 5)$ y es paralela al vector $\vec{v}(-1, 3)$.

Ejercicio nº 28.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $P(-1, 4)$.

Ejercicio nº 29.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $P(2, -2)$ y cuya pendiente es $m = -3$.

Ejercicio nº 30.-

Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

Ejercicio nº 31.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Ejercicio nº 32.-

¿Cuál ha de ser el valor de k para que estas dos rectas sean paralelas?

$$x + 3y - 2 = 0 \quad kx + 2y + 3 = 0$$

Ejercicio nº 33.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-1, 2)$ y es paralela a $3x - y + 4 = 0$.

Ejercicio nº 34.-

Halla el valor de k para que las rectas

$$2x - 3y + 4 = 0 \qquad -3x + ky - 1 = 0$$

sean perpendiculares.

Ejercicio nº 35.-

Dadas las rectas:

$$r: -4x + y - 3 = 0 \qquad s: kx - y + 1 = 0$$

halla el valor de k para que r y s sean perpendiculares.

Ejercicio nº 36.-

Calcula la distancia del punto $P(-3, 5)$ a la recta $r: y = 2x - 3$.

Ejercicio nº 37.-

Halla la distancia de P a Q y de P a r , siendo:

$$P(-1, -1), Q(2, -3) \text{ y } r: 3x - y + 6 = 0$$

Ejercicio nº 38.-

Dados los puntos $P(3, 2)$ y $Q(-2, 4)$, y la recta $r: 2x + y - 3 = 0$; calcula la distancia:

- a) Entre P y Q .
- b) De P a r .

Ejercicio nº 39.-

Halla la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Ejercicio nº 40.-

Halla el valor de k para que la distancia del punto $P(2, k)$ a la recta

$$r: x - y + 3 = 0 \text{ sea } \sqrt{2}.$$

Ejercicio nº 41.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(3, -4)$ respecto a la recta

$$r: -3x + y + 2 = 0.$$

Ejercicio nº 42.-

Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r: x - y - 2 = 0 \quad s: 2x + 3y - 9 = 0 \quad t: x = 0$$

Ejercicio nº 43.-

Halla el área del paralelogramo de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$ y $D(0, 3)$.

Ejercicio nº 44.-

Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, 2)$, halla las ecuaciones de sus tres medianas y calcula el baricentro (punto de intersección de las medianas).

Ejercicio nº 45.-

Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(3, 1) \quad B(6, -2) \quad C(0, -4)$$

Soluciones Geometría analítica

Ejercicio nº 1.-

- a) Averigua el punto simétrico de $A(5, -1)$ con respecto a $B(4, -2)$.
- b) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(4, -2)$.

Solución:

- a) Llamamos $A'(x, y)$ al simétrico de A con respecto a B . El punto B es el punto medio del segmento que une A con A' . Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+5}{2} = 4 \\ \frac{y-1}{2} = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=3 \\ y=-3 \end{array} \quad A'(3, -3)$$

- b) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{5+4}{2}, \frac{-1-2}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-3}{2} \right)$$

Ejercicio nº 2.-

- a) Halla el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(2, -5)$ con respecto al punto $B(-3, 2)$.
 b) Halla el simétrico de $A(2, -5)$ con respecto al punto $C(1, -4)$.

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{-5+2}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2} \right)$$

b) Llamamos $A'(x, y)$ al simétrico de A con respecto a C . Entonces C es el punto medio del segmento que une A con A' . Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+2}{2} = 1 \\ \frac{y-5}{2} = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=-3 \end{array} \rightarrow A'(0, -3)$$

Ejercicio nº 3.-

- a) Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3, -2)$ y $Q(-1, 5)$.
 b) Halla el simétrico del punto $P(3, -2)$ con respecto a $Q(-1, 5)$.

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+5}{2} \right) = \left(1, \frac{3}{2} \right)$$

b) Llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a Q . Q es el punto medio del segmento que une P y P' . Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3+x}{2} = -1 \rightarrow x = -5 \\ \frac{-2+y}{2} = 5 \rightarrow y = 12 \end{array} \right\} P'(-5, 12)$$

Ejercicio nº 4.-

Considera los puntos $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ y $C(x, y)$. Halla los valores de x e y para que C sea:

- a) El punto medio del segmento de extremos A y B .
 b) El simétrico de A con respecto a B .

Solución:

a) El punto medio es:

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) = (x, y) \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

b) B será el punto medio del segmento que une A y C , entonces:

$$\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = (2, 6) \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+x}{2} = 2 \\ \frac{3+y}{2} = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow C(5, 9)$$

Ejercicio nº 5.-

Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

- Halla el punto medio del segmento de extremos A y B .
- Halla el simétrico de B con respecto a C .

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

b) Llamamos $B'(x, y)$ al simétrico de B con respecto a C . Si B' es simétrico de B respecto de C , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (3, -12) \\ \overrightarrow{CB'} = (x-0, y+8) \end{array} \right\} \text{Entonces } \begin{cases} x = 3 \\ y + 8 = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -20 \end{cases}$$

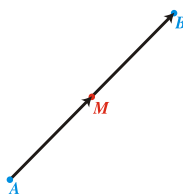
Por tanto:

$$B'(3, -20)$$

Ejercicio nº 6.-

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A , sabiendo que $B(-3, 2)$.

Solución:



Si llamamos $A(x, y)$, tenemos que:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, es decir

$$(2-x, -1-y) = (-3-2, 2-(-1))$$

$$(2-x, -1-y) = (-5, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2-x = -5 \rightarrow x = 7 \\ -1-y = 3 \rightarrow y = -4 \end{array} \right\} \text{ Por tanto } A(7, -4)$$

Ejercicio nº 7.-

Dados los puntos $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(x, 3)$, determina el valor de x para que A , B y C estén alineados.

Solución:

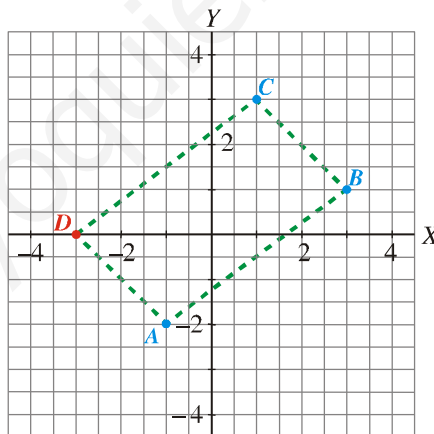
Para que los tres puntos estén alineados las coordenadas de \overrightarrow{AB} y de \overrightarrow{BC} han de ser proporcionales

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 7) \\ \overrightarrow{BC} = (x+1, -1) \end{array} \right\} \frac{-3}{x+1} = \frac{7}{-1} \rightarrow 3 = 7x+7 \rightarrow x = \frac{-4}{7}$$

Ejercicio nº 8.-

Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 3)$.

Solución:



Llamamos $D(x, y)$ al cuarto vértice.

Ha de cumplirse que:

$\overline{AB} = \overline{DC}$, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (4, 3) \\ \overline{DC} = (1-x, 3-y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 = 1-x \rightarrow x = -3 \\ 3 = 3-y \rightarrow y = 0 \end{array}$$

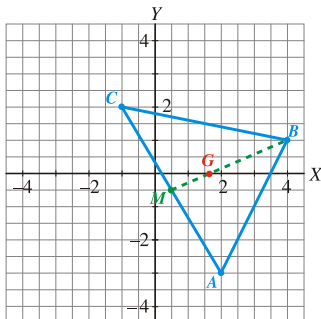
Por tanto:

$$D(-3, 0)$$

Ejercicio nº 9.-

Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Solución:



Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado AC . Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$$

Hallamos M :

$$M = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-3+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} - y \right) \\ \overrightarrow{BG} = (x - 4, y - 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} - y \right) = (x - 4, y - 1) \\ (1 - 2x, -1 - 2y) = (x - 4, y - 1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= x - 4 \rightarrow 5 = 3x \rightarrow x = \frac{5}{3} \\ -1 - 2y &= y - 1 \rightarrow 0 = 3y \rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

Ejercicio nº 10.-

Averigua las coordenadas del punto P , que divide al segmento de extremos $A(2, -4)$ y $B(1, 3)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$.

Solución:

Si llamamos (x, y) a las coordenadas de P , se ha de cumplir que:

$\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, es decir:

$$\overline{AP} = (x-2, y+4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-2, y+4) = 3(-1-x, 3-y) \\ (x-2, y+4) = (-3-3x, 9-3y) \end{array} \right.$$

$$x-2 = -3-3x \rightarrow 4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$y+4 = 9-3y \rightarrow 4y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{4}$$

Por tanto:

$$P\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

Ejercicio nº 11.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y es paralela a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Solución:

Vector posición $\overline{OP} (3, -1)$

Vector dirección $(-3, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 12.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, 4)$.

Solución:

Vector posición $\overline{OA} (2, -3)$

Vector dirección $\overline{AB} (-3, 7)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 7t \end{cases}$$

Ejercicio nº 13.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $2x - y + 3 = 0$ y que pasa por el punto $P(4, 3)$.

Solución:

Vector posición \overline{OP} (4, 3)

Vector dirección El vector (2, -1) es perpendicular a $2x - y + 3 = 0$, por tanto, podemos tomar como vector dirección el vector (1, 2).

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 14.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

Solución:

Vector posición \overline{OP} (2, -1)

Vector dirección (3, -2) es perpendicular a $3x - 2y + 1 = 0$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 15.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(-2, 8)$.

Solución:

Vector posición: \overline{OP} (-1, 3)

Vector dirección \overline{PQ} (-1, 5)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

Ejercicio nº 16.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 6t \end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 - 3k \\ y = 2 + 6k \end{cases}$$

Igualemos:

$$\begin{cases} 1 + t = -1 - 3k \\ -2 - 2t = 2 + 6k \end{cases} \quad \begin{cases} t = -2 - 3k \\ -2 - 2(-2 - 3k) = 2 + 6k - 2 + 4 + 6k = 2 + 6k \end{cases} \rightarrow 0 = 0k$$

Infinitas soluciones \rightarrow Se trata de la misma recta; r y s coinciden.

Ejercicio nº 17.-

Averigua la posición relativa de las rectas (si se cortan, averigua en qué punto):

$$r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 8k \\ y = -1 - 2k \end{cases}$$

Igualemos:

$$\begin{cases} 2 - 4t = 3 + 8k \\ -2 + t = -1 - 2k \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = 4t + 8k \\ -1 = -t - 2k \end{cases} \quad t = 1 - 2k \\ -1 = 4(1 - 2k) + 8k \rightarrow -1 = 4 - 8k + 8k \rightarrow -5 = 0k$$

No tiene solución \rightarrow Las rectas son paralelas.

Ejercicio nº 18.-

Determina la posición relativa de estas rectas. Si se cortan, di en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 - k \\ y = -3 + k \end{cases}$$

Igualemos:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 5 - k \\ 2 - 3t = -3 + k \end{cases} \quad \begin{cases} k = 4 - 2t \\ 2 - 3t = -3 + 4 - 2t \\ 1 = t \\ k = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Sustituyendo $t = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $k = 2$ en las de s), obtenemos el punto de corte de las dos rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x=1+2=3 \\ y=2-3=1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Las dos rectas se cortan en el punto } (3,-1).$$

Ejercicio nº 19.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -2 - 8k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} 2 - t = 4 + 2k \\ 6 + 4t = -2 - 8k \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 - 2k = t \\ 6 + 4(-2 - 2k) = -2 - 8k \\ 6 - 8 - 8k = -2 - 8k \\ 0 = 0k \end{array}$$

Infinitas soluciones \rightarrow Se trata de la misma recta; r y s coinciden.

Ejercicio nº 20.-

Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = -4 - k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} 4 + t = 5 + 3k \\ 1 + 2t = -4 - k \end{array} \right\} \begin{array}{l} t = 1 + 3k \\ 1 + 2(1 + 3k) = -4 - k \\ 1 + 2 + 6k = -4 - k \\ 7k = -7 \\ k = -1 \\ t = 1 + 3k = 1 - 3 = -2 \end{array}$$

Sustituimos $t = -2$ en las ecuaciones de r (o bien, $k = -1$ en las de s) para obtener el punto de corte de r y s :

$$\begin{cases} x = 4 - 2 = 2 \\ y = 1 - 4 = -3 \end{cases} \rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } (2, -3).$$

Ejercicio nº 21.-

Averigua el ángulo formado por las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Solución:

Hallamos el ángulo que forman los vectores dirección de las dos rectas:

Vector dirección de $r \rightarrow (4, 3)$

Vector dirección de $s \rightarrow (-1, 2)$

$$\cos \alpha = \frac{|(4, 3) \cdot (-1, 2)|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{|-4+6|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = 0,179 \rightarrow \alpha = 79^\circ 41' 43''$$

Ejercicio nº 22.-

Determina el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (3, -1)$

Vector dirección de $s \rightarrow (1, 2)$

Llamamos α al ángulo que forman r y s :

$$\cos \alpha = \frac{|(3, -1) \cdot (1, 2)|}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{|3-2|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = 0,141 \rightarrow \alpha = 81^\circ 52' 12''$$

Ejercicio nº 23.-

Dadas las rectas r y s , determina el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (2, 4)$
Vector dirección de $s \rightarrow (2, -1)$

Llamamos α al ángulo que forman r y s :

$$\cos\alpha = \frac{|(2, 4) \cdot (2, -1)|}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{|4-4|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Es decir, las rectas son perpendiculares.

Ejercicio nº 24.-

Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$$

Solución:

El ángulo que forman r y s lo podemos hallar a partir de sus vectores dirección:

Vector dirección de $r \rightarrow (-3, 2)$
Vector dirección de $s \rightarrow (-4, -6)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-3, 2) \cdot (-4, -6)|}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{16+36}} = \frac{|12-12|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Es decir, r y s son perpendiculares.

Ejercicio nº 25.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 6t \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (-2, 3)$
Vector dirección de $s \rightarrow (4, -6)$

Llamamos α al ángulo formado:

$$\cos\alpha = \frac{|(-2, 3) \cdot (4, -6)|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{16+36}} = \frac{|-8-18|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}} = \frac{26}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{26}{26} = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ (luego son perpendiculares).}$$

Ejercicio nº 26.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos $P(3, -1)$ y $Q(2, -4)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{-4 - (-1)}{2 - 3} = \frac{-4 + 1}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

La ecuación será:

$$y = -1 + 3(x - 3) \rightarrow y = -1 + 3x - 9 \rightarrow 3x - y - 10 = 0$$

Ejercicio nº 27.-

Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-2, 5)$ y es paralela al vector $\vec{v}(-1, 3)$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$$

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x = -6 - 3t \\ y = 5 + 3t \\ \hline 3x + y = -1 \end{array}$$

La ecuación implícita es $3x + y + 1 = 0$.

Ejercicio nº 28.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $P(-1, 4)$.

Solución:

Escribimos la ecuación punto-pendiente y operamos:

$$y = 4 + 2(x + 1) \rightarrow y = 4 + 2x + 2 \rightarrow 2x - y + 6 = 0$$

Ejercicio nº 29.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $P(2, -2)$ y cuya pendiente es $m = -3$.

Solución:

Escribimos la ecuación punto-pendiente y operamos:

$$y = -2 - 3(x - 2) \rightarrow y = -2 - 3x + 6 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$$

Ejercicio nº 30.-

Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, y sumamos:

$$\begin{cases} 3(x = -3 + 2t) \\ 2(y = 1 - 3t) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3x = -9 + 6t \\ 2y = 2 - 6t \\ \hline 3x + 2y = -7 \end{array} \right.$$

La ecuación implícita es $3x + 2y + 7 = 0$.

Ejercicio nº 31.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = -2x + 3 \rightarrow \text{pendiente} = -2$$

La pendiente de la perpendicular es:

$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta buscada será:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow 2y = 2 + x - 1 \rightarrow x - 2y + 1 = 0$$

Ejercicio nº 32.-

¿Cuál ha de ser el valor de k para que estas dos rectas sean paralelas?

$$x + 3y - 2 = 0 \qquad kx + 2y + 3 = 0$$

Solución:

Despejamos y en cada ecuación para obtener la pendiente de cada recta:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2 = 0 &\rightarrow 3y = -x + 2 \rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow \text{pendiente} = -\frac{1}{3} \\ kx + 2y + 3 = 0 &\rightarrow 2y = -kx - 3 \rightarrow y = \frac{-k}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow \text{pendiente} = \frac{-k}{2} \end{aligned}$$

Para que sean paralelas, las pendientes han de ser iguales:

$$-\frac{1}{3} = -\frac{k}{2} \rightarrow -2 = -3k \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Ejercicio nº 33.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-1, 2)$ y es paralela a $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$3x - y + 4 = 0 \rightarrow y = 3x + 4 \rightarrow \text{pendiente} = 3$$

La recta paralela tiene la misma pendiente; su ecuación será:

$$y = 2 + 3(x + 1) \rightarrow y = 2 + 3x + 3 \rightarrow 3x - y + 5 = 0$$

Ejercicio nº 34.-

Halla el valor de k para que las rectas

$$2x - 3y + 4 = 0 \quad -3x + ky - 1 = 0$$

sean perpendiculares.

Solución:

Despejamos y para obtener la pendiente de cada recta:

$$2x - 3y + 4 = 0 \rightarrow 3y = 2x + 4 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow \text{pendiente} = \frac{2}{3}$$

$$-3x + ky - 1 = 0 \rightarrow ky = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{k}x + \frac{1}{k} \rightarrow \text{pendiente} = \frac{3}{k}$$

Para que sean perpendiculares, tiene que cumplirse:

$$\frac{3}{k} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2} \rightarrow k = -2$$

Ejercicio nº 35.-

Dadas las rectas:

$$r: -4x + y - 3 = 0 \quad s: kx - y + 1 = 0$$

halla el valor de k para que r y s sean perpendiculares.

Solución:

Obtenemos la pendiente de cada una de la rectas:

$$-4x + y - 3 = 0 \rightarrow y = 4x + 3 \rightarrow \text{pendiente} = 4$$

$$kx - y + 1 = 0 \rightarrow y = kx + 1 \rightarrow \text{pendiente} = k$$

Para que r y s sean perpendiculares, ha de cumplirse que:

$$k = \frac{-1}{4}$$

Ejercicio nº 36.-

Calcula la distancia del punto $P(-3, 5)$ a la recta $r: y = 2x - 3$.

Solución:

Expresamos la recta en forma implícita:

$$r: y = 2x - 3 \rightarrow r: 2x - y - 3 = 0$$

Por tanto:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot (-3) - 5 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-6 - 5 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

Ejercicio nº 37.-

Halla la distancia de P a Q y de P a r , siendo:

$$P(-1, -1), Q(2, -3) \text{ y } r: 3x - y + 6 = 0$$

Solución:

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|3 \cdot (-1) - (-1) + 6|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-3 + 1 + 6|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Ejercicio nº 38.-

Dados los puntos $P(3, 2)$ y $Q(-2, 4)$, y la recta $r: 2x + y - 3 = 0$; calcula la distancia:

- Entre P y Q .
- De P a r .

Solución:

$$\text{a) } \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-5, 2)| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\text{b) } \text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|6 + 2 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Ejercicio nº 39.-

Halla la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Solución:

Expresamos r en forma implícita:

$$\begin{cases} 4 \cdot (x = -3 + 2t) \\ -2 \cdot (y = 1 + 4t) \end{cases} \begin{cases} 4x = -12 + 8t \\ -2y = -2 - 8t \end{cases}$$
$$\frac{4x - 2y = -14}{4x - 2y = -14}$$

$$4x - 2y + 14 = 0$$

Hallamos la distancia de P a r :

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 14|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{|8 + 2 + 14|}{\sqrt{20}} = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{24\sqrt{20}}{20} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{2}}{5} = 6\sqrt{2}$$

Ejercicio nº 40.-

Halla el valor de k para que la distancia del punto $P(2, k)$ a la recta

$$r: x - y + 3 = 0 \text{ sea } \sqrt{2}.$$

Solución:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2 - k + 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|5 - k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow |5 - k| = 2$$

Hay dos posibilidades:

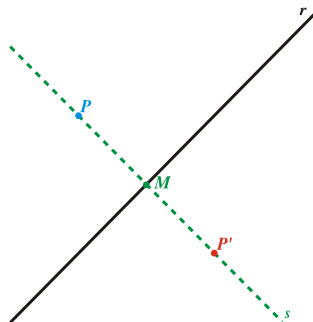
$$\begin{cases} 5 - k = 2 \rightarrow k = 3 \\ 5 - k = -2 \rightarrow k = 7 \end{cases}$$

Ejercicio nº 41.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(3, -4)$ respecto a la recta

$$r: -3x + y + 2 = 0.$$

Solución



1.º) Hallamos la ecuación de la recta, s , que es perpendicular a r y que pasa por P :

$$r: -3x + y + 2 = 0 \rightarrow y = 3x - 2 \rightarrow \text{pendiente} = 3$$

La pendiente de s será $-\frac{1}{3}$. Por tanto:

$$s: y = -4 - \frac{1}{3}(x - 3) \rightarrow 3y = -12 - x + 3$$

$$s: x + 3y + 9 = 0$$

2.º) Hallamos el punto de corte, M , entre r y s :

$$\begin{cases} -3x + y + 2 = 0 \\ x + 3y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ x + 3(3x - 2) + 9 = 0 \\ x + 9x - 6 + 9 = 0 \\ 10x = -3 \\ x = \frac{-3}{10} \rightarrow y = \frac{-9}{10} - 2 = \frac{-29}{10} \end{cases}$$

El punto es $M\left(\frac{-3}{10}, \frac{-29}{10}\right)$.

3.º) Si llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a r , M es el punto medio entre P y P' . Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{2} &= \frac{-3}{10} \rightarrow 30+10x = -6 \rightarrow x = \frac{-36}{10} = \frac{-18}{5} \\ \frac{-4+y}{2} &= \frac{-29}{10} \rightarrow -40+10y = -58 \rightarrow y = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5} \end{aligned}$$

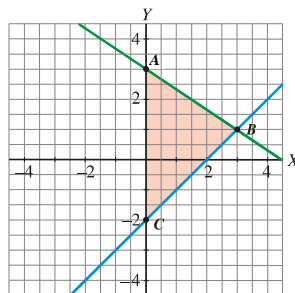
El punto buscado es $P'\left(\frac{-18}{5}, \frac{-9}{5}\right)$.

Ejercicio nº 42.-

Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r: x - y - 2 = 0 \quad s: 2x + 3y - 9 = 0 \quad t: x = 0$$

Solución:



1.º) Los vértices del triángulo son los puntos de corte de las rectas:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = y + 2 \\ 2(y + 2) + 3y - 9 = 0 \\ 2y + 4 + 3y - 9 = 0 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

Punto $B(3, 1)$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = -2 \\ \text{Punto } C(0, -2) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = 3 \\ \text{Punto } A(0, 3) \end{array} \right.$$

2.º) Tomamos el lado AC como base del triángulo:

$$\text{base} = |\overrightarrow{AC}| = 5$$

3.º) La altura es la distancia de B a la recta que pasa por A y por C (que es el eje Y). Por tanto:

$$\text{altura} = 3$$

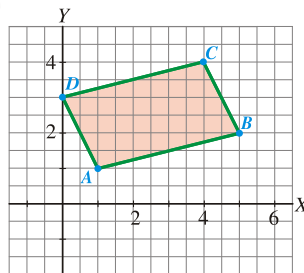
4.º) El área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 43.-

Halla el área del paralelogramo de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$ y $D(0, 3)$.

Solución:



1.º) Tomamos como base el lado AB :

$$\text{base} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

2.º) La altura es la distancia del vértice C (o del D) a la recta que pasa por A y B . Obtengamos la ecuación de dicha recta.

$$\text{pendiente} = \frac{2 - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$r: y = 1 + \frac{1}{4}(x - 1) \rightarrow 4y = 4 + x - 1 \rightarrow x - 4y + 3 = 0$$

$$\text{altura} = \text{dist}(C, r) = \frac{|4 - 16 + 3|}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{|-9|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}}$$

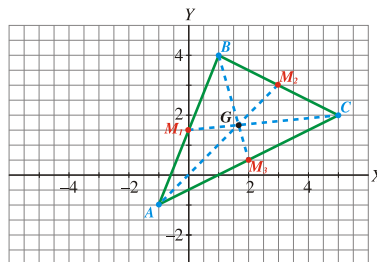
Así, el área es:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} = 9 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 44.-

Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, 2)$, halla las ecuaciones de sus tres medianas y calcula el baricentro (punto de intersección de las medianas).

Solución:



1.º) Hallamos los puntos medios de cada lado:

- de $AB \rightarrow M_1 \left(0, \frac{3}{2} \right)$
- de $BC \rightarrow M_2 (3, 3)$
- de $AC \rightarrow M_3 \left(2, \frac{1}{2} \right)$

2.º) Hallamos las ecuaciones de las tres medianas:

- La que pasa por A y M_2 :

$$\text{pendiente} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{recta: } y = 3 + 1 \cdot (x - 3) \rightarrow y = 3 + x - 3 \rightarrow x - y = 0$$

- La que pasa por B y M_3 :

$$\text{pendiente} = \frac{4 - 1/2}{1 - 2} = \frac{7/2}{-1} = \frac{-7}{2}$$

$$\text{recta: } y = 4 - \frac{7}{2}(x - 1) \rightarrow 2y = 8 - 7x + 7 \rightarrow 7x + 2y - 15 = 0$$

- La que pasa por C y M_1 :

$$\text{pendiente} = \frac{2 - 3/2}{5 - 0} = \frac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\text{recta: } y = 2 + \frac{1}{10}(x - 5) \rightarrow 10y = 20 + x - 5 \rightarrow x - 10y + 15 = 0$$

3.º) Hallamos el baricentro como punto de corte de las medianas:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 7x + 2y - 15 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = y \\ 7x + 2x - 15 = 0 \rightarrow 9x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \end{array}$$

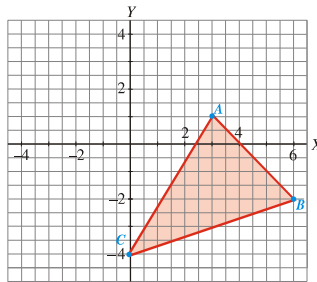
$$\text{Baricentro} = G = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

Ejercicio nº 45.-

Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(3, 1) \quad B(6, -2) \quad C(0, -4)$$

Solución



1.º) Tomamos el lado BC como base del triángulo:

$$\text{base} = |\overline{BC}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C . Hallamos la ecuación de dicha recta:

$$\text{pendiente} = \frac{-4 + 2}{0 - 6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = -4 + \frac{1}{3}x \rightarrow 3y = -12 + x \rightarrow r: x - 3y - 12 = 0$$

Por tanto:

$$\text{altura} = \text{dist}(A, r) = \frac{|3 - 3 - 12|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) El área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \frac{12}{\sqrt{10}}}{2} = 12 \text{ u}^2$$