

## EJERCICIOS de RECTAS

### Forma paramétrica:

1. Dado el punto  $A(5,3)$  y el vector director  $\vec{u}_r = (1,-2)$  se pide:
  - a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que determinan.
  - b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
  - c) Comprobar analíticamente si los puntos  $P(2,-1)$  y  $Q(3,7) \in r$
  - d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.
2. Dados los puntos  $A(1,3)$  y  $B(-1,6)$ , se pide:
  - a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que determinan.
  - b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
  - c) Comprobar analíticamente si los puntos  $P(7,-6)$  y  $Q(2,2) \in r$
  - d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.

### Forma continua y general:

3. Con los datos del ejercicio 1, se pide:
  - a) Hallar las ecuaciones continua y general o implícita de la recta  $r$  que determinan. (Soluc:  $2x+y-13=0$ )
  - b) Comprobar en la ecuación general que  $\vec{u}_r = (-B,A)$
  - c) A partir de la ecuación general, obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
  - d) Comprobar en ambas ecuaciones si los puntos  $P(2,1)$  y  $Q(3,7) \in r$
4. Ídem con los datos del ejercicio 2 (Soluc:  $3x+2y-9=0$ )
5. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.

### Forma punto-pendiente:

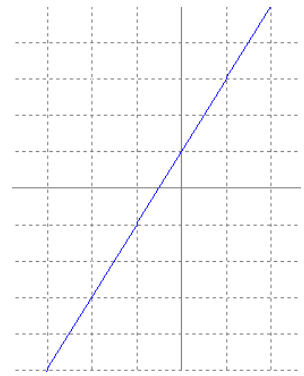
6. Hallar la forma punto-pendiente de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2
  - a) Directamente, a partir de los datos.
  - b) A partir de su forma continua.

### Forma explícita:

7. Hallar la forma explícita de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2
  - a) Directamente, a partir de los datos.
  - b) A partir de las formas anteriores.(Soluc:  $y=-2x+13$  e  $y=-3x/2+9/2$ )

### Todas las formas:

8.
  - a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(3,5)$  y tiene la dirección del vector  $\vec{u} = (2,-4)$  en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc:  $2x+y-11=0$ )
  - b) Ídem para el punto  $A(3,1)$  y  $\vec{u} = (4,-2)$  (Soluc:  $x+2y-5=0$ )
  - c) Ídem para  $A(3,1)$  y  $\vec{u} = (0,2)$  (Soluc:  $x=3$ )
  - d) Ídem para  $A(3,-1)$  y  $\vec{u} = (5,0)$  (Soluc:  $y=-1$ )



9. Dada la recta de la figura, hallar su ecuación:

- a) Directamente, en forma continua.
- b) En forma general, operando a partir de la anterior.
- c) Directamente, en forma punto-pendiente.
- d) Directamente, en forma explícita.

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2) y B(1,-4) en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc:  $3x-y-7=0$ )

11. Representar las siguientes rectas:

- a)  $2x+3y-7=0$
- b)  $x=3$
- c)  $y=2$
- d)  $\left. \begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=-5+2\lambda \end{array} \right\}$
- e)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$

12. Pasar a forma explícita las siguientes rectas y calcular sus pendientes:

- a)  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1}$
- b)  $5x+3y+6=0$
- c)  $\left. \begin{array}{l} x=2+t \\ y=5-3t \end{array} \right\}$  (Soluc :  $y = -\frac{x}{2} - \frac{7}{2}$ ;  $y = -\frac{5}{3}x - 2$ ;  $y = -3x + 11$ )

13. Determinar si el punto P(2,-1) pertenece a la recta  $3x-2y+5=0$ . ¿Y el punto (1,4)? (Soluc: NO; Sí)

14. Dada la recta  $ax+5y+4=0$ , determinar **a** para que la recta pase por el punto (2,-2) (Soluc:  $a=3$ )

15. a) Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)

c) Hallar k para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. (Soluc: Sí; NO;  $k=-5/3$ )

16. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2,1/3) y tiene igual pendiente que la recta que pasa por P(2,1) y Q(3,4) (Soluc :  $y - \frac{1}{3} = 3(x + 2)$ )

17. Dada la recta que pasa por A(1,0) y B(3,4) se pide:

a) Hallar su forma paramétrica, continua, implícita, punto-pendiente y explícita. (Soluc:  $2x-y-2=0$ )

b) ¿Cuál es su pendiente? (Soluc:  $m=2$ )

c) ¿El punto (2,2) pertenece a dicha recta? (Soluc:  $(2,2) \in r$ )

18. Ídem para la recta que pasa por A(-2,1) y B(4,5). ¿El punto (1,3) es de dicha recta?

19. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de  $120^\circ$  con la parte positiva del eje x. (Soluc :  $y - 1 = -\sqrt{3}(x - 2)$ )

20. ¿Qué ángulo forma la recta  $x+y+5=0$  con  $OX^+$ ? (Soluc:  $135^\circ$ )

21. Dada la recta  $5x-3y+7=0$ , hallar la longitud de los segmentos que determina sobre los ejes. Hacer el dibujo. (Soluc:  $7/5$  u sobre  $OX$ ;  $7/3$  u sobre  $OY$ )
22. Hallar el área limitada por la recta  $5x+y-5=0$ , el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Hacer el dibujo. (Soluc:  $5/2$  u<sup>2</sup>)
23. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(3,1)$  y forma  $45^\circ$  con el eje  $OX$  (Soluc:  $y=x-2$ )
24. a) ¿Qué ángulo forma la recta  $3x-2y+6=0$  con el eje de abscisas? (Soluc:  $\cong 56^\circ 18' 36''$ )  
 b) ¿Qué ángulo forma la recta  $2x-y+5=0$  con el eje de ordenadas? (Soluc:  $\cong 26^\circ 33' 54''$ )  
 c) Calcular  $n$  de modo que la recta  $3x+ny-2=0$  forme un ángulo de  $60^\circ$  con  $OX$  (Soluc:  $n=-\sqrt{3}$ )
25. Resolver gráficamente –es decir, hallar gráficamente el posible punto de corte de cada pareja de rectas– los siguientes sistemas de ecuaciones:
- a)  $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 11 \\ 3x - 2y = -3 \end{array} \right\}$       b)  $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 33 \end{array} \right\}$       c)  $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 3 \end{array} \right\}$  (Soluc:  $(1,3)$ ;  $\infty$  soluc;  $\emptyset$  soluc)
26. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas  $2x+3y-4=0$  y  $x-y=0$  y por  $A(2,1)$  (Soluc:  $x-6y+4=0$ )  
 b) Ídem para las rectas  $3x+y-11=0$  y  $x+2y-7=0$  y el punto  $A(-1,2)$  (Soluc:  $y=2$ )
27. La recta  $y+2=m(x+3)$  pasa por el punto de intersección de las rectas  $2x+3y+5=0$  y  $5x-2y-16=0$ . Calcular  $m$  (Soluc:  $m=-1/5$ )

### Posición relativa de 2 rectas:

28. Dadas las rectas:      r:  $2x+3y-4=0$       u:  $4x+6y-8=0$   
    s:  $x-2y+1=0$       v:  $2x-4y-6=0$   
    t:  $3x-2y-9=0$       w:  $2x+3y+9=0$
- ¿Cuáles son coincidentes? ¿Cuáles son paralelas? (Soluc:  $r=u$ ;  $s//v$ ;  $t//w$ )

29. Ídem para las rectas      r:  $y=5x-3$       u:  $y=3x-2$   
    s:  $y=-x+2$       v:  $y=2x+13$   
    t:  $y=2x-1$       w:  $y=-x-3$  (Soluc:  $t//v$ ;  $s//w$ )

Comprobar el resultado dibujándolas.

30. Comprobar, por dos métodos, si las siguientes rectas son paralelas, secantes o coincidentes; en este último supuesto, hallar el punto de corte:

a)  $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 3x + 2y + 7 = 0 \end{array} \right\}$       b)  $\left. \begin{array}{l} x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{array} \right\}$       c)  $\left. \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{array} \right\}$

(Soluc: a) paralelas; b) secantes; c) coincidentes)

31. Determinar  $m$  y  $p$  para que las rectas  $mx+3y+5=0$  y  $2x+6y-p=0$  sean coincidentes. (Soluc:  $m=1$ ;  $p=-10$ )

32. a) Dadas las rectas  $3x-4y+1=0$  calcular  $m$  para que sean paralelas. ¿Pueden ser coincidentes?  
 $mx+8y-14=0$  (Soluc:  $m=-6$ )
- b) Ídem para las rectas  $4x-3y+1=0$  (Soluc:  $m=-8$ )  
 $mx+6y+4=0$
33. La recta  $3x+ny-7=0$  pasa por el punto  $A(2,3)$  y es paralela a la recta  $mx+2y=13$ . Calcular  $m$  y  $n$   
 (Soluc:  $m=18; n=1/3$ )
34. Dada la recta  $r$  determinada por  $A(2,1)$  y  $\vec{u}=(a,4)$ , y la recta  $s$  determinada por  $B(-1,4)$  y  $\vec{v}=(5,3)$
- a) Hallar  $a$  para que  $r$  y  $s$  sean paralelas (Soluc:  $a=20/3$ )
- b) ¿Para qué valores de  $a$  son secantes? (Soluc:  $a \neq 20/3$ )
- c) ¿Pueden ser coincidentes? (soluc: NO)

### Recta // a una dada:

35. a) Calcular la ecuación de la recta paralela a  $3x+2y-4=0$  que pasa por el punto  $A(2,3)$  (Soluc:  $3x+2y-12=0$ )  
 b) Ídem para  $y=2x+3$  (Soluc:  $y=2x-1$ )
36. Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $(2,3)$  y es: a) Paralela al eje  $x$  (Soluc:  $y=3$ )  
 (Hacer un dibujo explicativo previo en los cuatro primeros apartados) b) Paralela al eje  $y$  (Soluc:  $x=2$ )  
 c) Paralela a la bisectriz del 1<sup>er</sup> cuadrante. (Soluc:  $y=x+1$ )  
 d) Ídem del 2<sup>o</sup> cuadrante. (Soluc:  $y=-x+5$ )  
 e) Paralela a  $5x+2y=0$  (Soluc:  $5x+2y-16=0$ )
37. Hallar la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta determinada por  $A(1,1)$  y  $B(-3,6)$   
 (Soluc:  $y = -\frac{5}{4}x$ )
38. Dadas las rectas  $r: x-2y+7=0$   
 $s: 2x+y+4=0$   
 y el punto  $P(5,1)$ , hallar las ecuaciones de los otros dos lados del paralelogramo formado por  $r, s$  y  $P$ .  
 (Soluc:  $x-2y-3=0$  y  $2x+y-11=0$ )
39. **TEORÍA:** Responder, razonadamente, a las siguientes cuestiones:
- a) ¿Cómo son los vectores directores de dos rectas paralelas?
- b) Si se sabe que el vector director de una recta es  $(2,5)$ , ¿podemos conocer su pendiente?
- c) Y si sabemos que la pendiente es 3, ¿podemos obtener un vector director?
- d) ¿Cuántos vectores directores puede tener una recta?
- e) Si una recta tiene por vector director  $(4,2)$  y otra tiene el  $(-2,-1)$ , ¿pueden ser la misma?
- f) Razonar que si una recta tiene la forma  $Ax+By+k=0$ , entonces cualquier recta  $\perp$  a ella sería de la forma  $Bx-Ay+k'=0$
- g) ¿Por qué toda recta que pasa por el origen carece de término independiente en su forma general?

## Puntos y rectas notables de un triángulo:

### Recta $\perp$ a una dada:

40. En cada apartado, hallar la recta  $\perp$  a la dada, por el punto que se indica (hacer un dibujo aproximado explicativo):

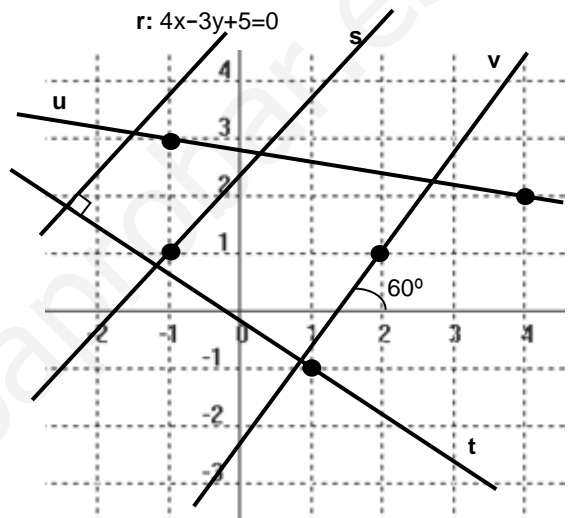
- a)  $x-2y+3=0$ ;  $P(3,-1)$  (Soluc:  $2x+y-5=0$ )  
 b)  $3x+2y+1=0$ ;  $P(1,-1)$  (Soluc:  $2x-3y-5=0$ )  
 c)  $\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{array} \right\}$ ;  $P(1,3)$  (Soluc:  $x-3y+8=0$ )  
 d)  $y-4=2(x-1)$ ;  $P(1,1)$  (Soluc:  $x+2y-3=0$ )  
 e)  $y=2x-5$ ;  $P(-2,3)$  (Soluc:  $x+2y-4=0$ )

- f)  $y-3=2(x+1)$ ;  $0(0,0)$  (Soluc:  $x+2y=0$ )  
 g)  $x+2y-17=0$ ;  $P(3,7)$

41. En la figura,  $s \parallel r$  y  $t \perp r$ . Hallar:

- a) La ecuación general de las rectas  $s$ ,  $t$  y  $u$   
 (Soluc:  $s: 4x-3y+7=0$ ;  $t: 3x+4y+1=0$ ;  $u: x+5y-14=0$ )  
 b) La ecuación punto-pendiente de  $v$  (Soluc:  $y-1=\sqrt{3}(x-2)$ )

42. Hallar el pie de la perpendicular trazada desde  $P(1,-2)$  a la recta  $r: x-2y+4=0$  (Soluc:  $P'(-4/5, 8/5)$ )



### Mediatriz:

43. a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por  $A(-2,1)$  y  $B(6,5)$ . Dibujar la situación.  
 (Sol:  $M(2,3)$ )

b) El punto  $M(5,-2)$  es el punto medio del segmento  $AB$ , y conocemos  $A(2,3)$ . Hacer un dibujo explicativo y hallar  $B$ . (Sol:  $B(8,-7)$ )

c) Hallar el punto simétrico de  $P(1,-2)$  respecto del punto  $Q(3,0)$ . Hacer un dibujo explicativo. (Sol:  $P'(5,2)$ )

44. Hallar la ecuación de la recta  $\perp$  al segmento de extremos  $A(5,6)$  y  $B(1,8)$  en su punto medio. ¿Cómo se llama dicha recta? Hacer un dibujo explicativo. (Soluc:  $2x-y+1=0$ ; mediatriz)

45. La recta  $3x-2y-6=0$  corta a los ejes en dos puntos  $A$  y  $B$ . Calcularlos y hallar la mediatriz de  $\overline{AB}$ .  
 (Soluc:  $4x+6y+5=0$ )

46. Dada la recta  $x+2y+1=0$  hallar el punto simétrico de  $P(2,-3)$  respecto a dicha recta. [Soluc:  $P'(16/5, -3/5)$ ]

\* 47. Sabiendo que la recta  $2x-y+1=0$  es mediatriz de  $\overline{AB}$  y  $A(2,-3)$ , calcular  $B$ . ¿Cómo podríamos comprobar que el resultado es correcto? [Soluc:  $B(-22/5, 1/5)$ ]

Ejercicio libro: 74 pág. 210

## Bisectriz:

48. Dado el triángulo de vértices A(2,1), B(5,-3) y C(7,13), hallar razonadamente, mediante cálculo vectorial, la ecuación de la bisectriz correspondiente al vértice A. (Ayuda: Dado un punto genérico  $X(x,y) \in$  bisectriz, plantear que  $\vec{AB} \cdot \vec{AX} = \vec{AC} \cdot \vec{AX}$ ) (Soluc:  $x-8y+6=0$ )

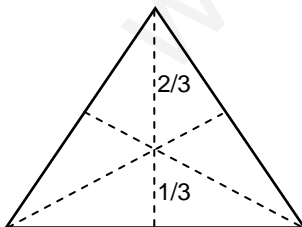
**NOTA:** Cuando se aborde más adelante el cálculo de la distancia punto-recta, se verá otro método mucho mejor para hallar la bisectriz.

## Mediana, altura, etc:

49. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,3) y C(3,7) se pide:
- Mediante la fórmula correspondiente, hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad (Por curiosidad, se recomienda obtener la ecuación de dos medianas cualesquiera y comprobar que se cortan en dicho punto)
  - Ecuaciones de dos alturas cualesquiera, y coordenadas del ortocentro.
  - Ecuaciones de dos mediatrices cualesquiera, y coordenadas del circuncentro.
  - Calcular la ecuación de la recta de Euler.
  - Comprobar que el ortocentro dista el doble del centro de gravedad que el circuncentro.
- (Soluc: a) AB:  $x=3$ ; BC:  $4x-3y-1=0$ ; G(3,11/3)      b) AB:  $2x+y-13=0$ ; BC:  $x-2y+1=0$ ; AC:  $x+3y-14=0$ ; O(5,3)  
c) AB:  $2x+y-8=0$ ; BC:  $x-2y+6=0$ ; AC:  $x+3y-14=0$ ; C(2,4)      d)  $x+3y-14=0$ )
50. Dibujar en unos ejes cartesianos el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(-3,-2), y hallar:
- La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC. (Soluc:  $4x-y+1=0$ )
  - La ecuación de la altura correspondiente al lado AC. (Soluc:  $5x+2y-2=0$ )
  - La ecuación de las mediatrices correspondientes a AB y AC. (Soluc:  $4x-2y-3=0$ ;  $10x+4y+9=0$ )
  - ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las anteriores? Obtenerlo (Sol: Circuncentro(-1/6,-11/6))
51. Dibujar el triángulo de vértices A(3,1), B(0,2) y C(1,-2), y hallar:
- La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC (Soluc:  $5x+4y-8=0$ )
  - Las ecuaciones de las alturas correspondientes a los lados AC y BC (Sol:  $2x+3y-6=0$ ;  $x-4y+1=0$ )
  - ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las alturas? Obtenerlo. (Soluc: Ortocentro (21/11,8/11))
  - La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado AC (Soluc:  $4x+6y-5=0$ )
- \* 52. Los puntos B(-1,3) y C(3,-3) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC. El punto A está en la recta  $x+2y-15=0$ . Calcular A

53. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(1,6), B(-5,8) y C(-3,-4)

(Soluc:  $4x-5y+26=0$ ;  $7x+4y+3=0$ ;  $11x-y+29=0$ )



- Demostrar que en un triángulo equilátero el baricentro está situado a una distancia de la base que es siempre 1/3 de la altura (ver figura).
- Los vértices de un triángulo son A(7,5), B(-8,3) y C(4,-5)
  - Hallar las medianas AB y AC y el baricentro.
  - Ídem para alturas y ortocentro.
- Ídem para mediatrices y circuncentro.
- Trazar sobre papel milimetrado las tres medianas, alturas y mediatrices, y las circunferencias circunscrita e inscrita, y comprobar que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados (Utilizar escala 1 u=1 cm).

## Ángulo de dos rectas:

56. Calcular el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

- |                                    |                                |                                |   |   |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---|---|--------------------------------|
| a) $2x-3y+4=0$                     | $5x-2y-3=0$                    | (Soluc: $\cong 34^\circ 31'$ ) | j) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$                                  | $-2x+3y-5=0$  | (Soluc: $\cong 22^\circ 37'$ ) |
| b) $2x+3y-5=0$                     | $x-y+7=0$                      | (Soluc: $\cong 78^\circ 41'$ ) | k) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4}$                                | $3x+4y=0$   | (Soluc: $90^\circ$ )           |
| c) $x-2y+4=0$                      | $3x-y-1=0$                     | (Soluc: $45^\circ$ )           | l) $3x+4y-12=0$   | $5x-12y+8=0$  | (Soluc: $\cong 59^\circ 30'$ ) |
| d) $y=2x-3$                        | $y=-2x+1$                      | (Soluc: $\cong 53^\circ 8'$ )  | m) $\left. \begin{array}{l} x=3+t \\ y=5-2t \end{array} \right\}$ | $\left. \begin{array}{l} x=-3+4\lambda \\ y=-1+3\lambda \end{array} \right\}$ | (Soluc: $\cong 79^\circ 42'$ ) |
| e) $y=3x-5$                        | $y=3x+2$                       | (Soluc: $0^\circ$ )            | n) $y=7x+54$  | $3x-4y+128=0$   | (Soluc: $45^\circ$ )           |
| f) $-x+2y+1=0$                     | $3x+y+5=0$                     | (Soluc: $\cong 81^\circ 52'$ ) |   |   |                                |
| g) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$ | $\frac{x}{12} = \frac{y-3}{5}$ | (Soluc: $\cong 30^\circ 31'$ ) |   |   |                                |
| h) $-x+2y+5=0$                     | $2x-3y+4=0$                    | (Soluc: $\cong 7^\circ 8'$ )   |   |   |                                |
| i) $3x-4y+2=0$                     | $3x-4y+7=0$                    | (Soluc: $0^\circ$ )            |   |   |                                |

57. Razonar, sin cálculo previo, cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares:

- a)  $2x+3y-4=0$        $4x+6y-8=0$   
b)  $2x+3y-4=0$        $6x-4y+5=0$   
c)  $3x-2y+7=0$        $4x+6y-3=0$   
d)  $x+y-8=0$        $2x+3y+6=0$       (Soluc: NO; Sí; Sí; NO)

58. ¿Es perpendicular la recta  $2x+3y+4=0$  con otra que tenga de pendiente  $3/2$ ?      (Soluc: Sí)

59. Determinar el parámetro  $m$  con la condición de que las rectas  $2x-4y+12=0$  sean perpendiculares.  
(Soluc:  $m=16$ )       $mx+8y-15=0$

60. Determinar el valor de  $a$  para que las rectas  $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$  sean: a) Paralelas.  
(Soluc:  $a=0$  o  $a=1/3$ ;  $a=-1/2$ )       $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$       b) Perpendiculares.

61. Dadas las rectas  $r: x+2y-3=0$  se pide: a) Hallar  $k$  para que sean // (Soluc:  $k=-2$ )  
s:  $x-ky+4=0$       b) Hallar  $k$  para que sean  $\perp$  (Soluc:  $k=1/2$ )  
c) Hallar la ecuación general de la recta  $\perp$  a  $r$  que pasa por el origen. (Soluc:  $2x-y=0$ )

62. Calcular los coeficientes  $m$  y  $n$  de las rectas  $mx-2y+5=0$   
 $nx+6y-8=0$   
sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto  $(1,4)$       (Soluc:  $m=3$ ;  $n=4$ )

63. Dada la recta de ecuación  $ax+by=1$ , determinar  $a$  y  $b$  sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta  $2x+4y=11$  y que pasa por el punto  $(1,3/2)$       (Soluc:  $a=4$ ;  $b=-2$ )

64. Hallar el valor de  $a$  para que las rectas  $\left. \begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \end{array} \right\}$        $\left. \begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2+a\lambda \end{array} \right\}$  formen  $45^\circ$   
(Aviso: puede haber dos soluciones)      (Soluc:  $a_1=6$ ,  $a_2=-2/3$ )

65. Sean las rectas  $r: 3x+my+12=0$   
s:  $2x+y+n=0$

Determinar  $m$  y  $n$  sabiendo que forman un ángulo de  $60^\circ$  y que la recta  $s$  pasa por el punto  $(3,-5)$   
(Advertencia: puede haber dos soluciones)      (Sol:  $m_1=24+15\sqrt{3}$  y  $n_1=-1$ ;  $m_2=24-15\sqrt{3}$  y  $n_2=-1$ )

66. a) Determinar la ecuación de la recta que pasando por A(5,-2) forme 45° con la que tiene por ecuación  $3x+7y-12=0$  (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc:  $y+2 = \frac{2}{5}(x-5)$ ;  $y+2 = -\frac{5}{2}(x-5)$ )  
 b) ¿Cómo son las pendientes de las dos soluciones? ¿Por qué?
67. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por P(2,-3), forma un ángulo de 45° con la recta  $3x-4y+7=0$  (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc:  $y+3 = -\frac{1}{7}(x-2)$ ;  $y+3 = 7(x-2)$ )
68. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto (-3,0) y forman con la recta de ecuación  $3x-5y+9=0$  un ángulo cuya tangente vale 1/3 (Soluc:  $y = \frac{2}{9}(x+3)$ ;  $y = \frac{7}{6}(x+3)$ )
69. Dadas las rectas r:  $2x+y-4=0$  hallar a para que: a) Sean // (Soluc:  $a=-4$ )  
 s:  $ax-2y+5=0$  b) Sean  $\perp$  (Soluc:  $a=1$ )  
 c) Formen 60° (Soluc:  $a = \frac{16 \pm 10\sqrt{3}}{11}$ )

### d(P,r):

70. a) Calcular la distancia del punto P(1,2) a la recta  $3x-4y+1=0$  (Soluc: 4/5)  
 b) "" "" "" P(2,-1) a la recta  $3x+4y=0$  (Soluc: 2/5)  
 c) "" "" del origen a la recta  $\left. \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -2-\lambda \end{array} \right\}$  (Soluc:  $3/\sqrt{5}$ )  
 d) "" "" "" a la recta  $y=4$  (Soluc: 4)  
 e) "" "" del punto P(1,-3) a la recta  $\frac{x-1}{2} = y+5$  (Soluc:  $4/\sqrt{5}$ )  
 f) "" "" "" P(2,4) a la recta  $y=-2x+3$  (Soluc:  $\sqrt{5}$ )  
 g) "" "" "" P(-1,7) a la recta  $y-3=2(x+3)$  (Soluc: 0)
71. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos A(-2,1) y B(3,-2) (Soluc:  $1/\sqrt{34}$ )
72. Hallar la distancia del punto (-1,1) a la recta que corta a los ejes  $Ox^*$  y  $Oy^*$  a las distancias 3 y 4 del origen. (Soluc: 13/5)
73. Hallar la longitud del segmento que determina la recta  $x-2y+5=0$  al cortar a los ejes de coordenadas. (Soluc:  $5\sqrt{5}/2$ )
74. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasando por el punto A(0,2) tiene de pendiente -1 (Soluc:  $\sqrt{2}$ )
75. Determinar c para que la distancia de la recta  $x-3y+c=0$  al punto (6,2) sea de  $\sqrt{10}$  unidades. (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo de la situación. (Soluc:  $c=\pm 10$ )
76. Calcular el valor de a para que la distancia del punto P(1,2) a la recta  $ax+2y-2=0$  sea igual a  $\sqrt{2}$  (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo. (Soluc:  $a=2$ )



77. Calcular las ecuaciones de las dos rectas que pasando por el punto A(1,-2) disten 2 unidades del punto B(3,1). Se recomienda hacer un dibujo previo. (Soluc:  $y + 2 = \frac{5}{12}(x - 1)$ ;  $x = 1$ )

78. Hallar la ecuación de las dos rectas paralelas de pendiente 3/4 que distan 2 unidades del punto (2,3). (Ayuda: se recomienda hacerlo en forma explícita). Hacer un dibujo de la situación.

(Sol :  $y = \frac{3}{4}x + 4$ ;  $y = \frac{3}{4}x - 1$ )

**d(r,s):**

79. a) Hallar la distancia entre las rectas  $2x+3y-6=0$  y  $2x+3y+7=0$  (Soluc:  $\sqrt{13}$ )

b) "" "" "" ""  $\left. \begin{matrix} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{matrix} \right\} \frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{1}$  (Soluc:  $23/\sqrt{10}$ )

c) "" "" "" ""  $3x-4y+16=0$  y  $2x-5y+2=0$  (Soluc: 0)

d) "" "" "" ""  $3x-4y+16=0$  e  $y = \frac{3}{4}x - 1$  (Soluc: 4)

80. Dada la recta  $3x-4y+19=0$ , se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por P(5,6), en todas las formas conocidas. (Soluc:  $3x-4y+9=0$ )

b) Hallar la distancia entre las dos rectas anteriores. (Soluc: 2 u)

c) Hallar el ángulo que dichas rectas forman con la recta  $7x-y+3=0$  (Soluc:  $45^\circ$ )

81. a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta s que tiene la misma pendiente que r:  $y=3x-1$  y pasa por P(-1,2) (Soluc:  $3x-y+5=0$ )

b) Hallar la distancia entre las dos rectas r y s anteriores. (Soluc:  $3\sqrt{10}/5$  u)

c) Hallar el ángulo que forma r con la recta t:  $x-2y+4=0$  (Soluc:  $45^\circ$ )

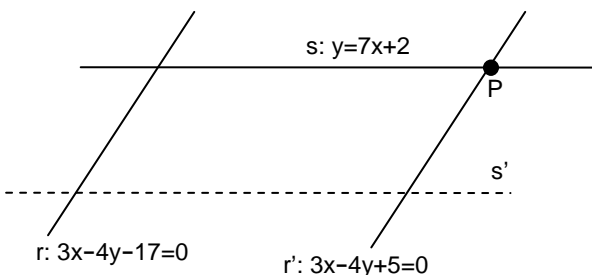
82. Dados los siguientes pares de rectas, hallar m para que sean paralelas y calcular su distancia:

a)  $3x-4y+1=0$  (Soluc:  $m=-6$ ;  $d=6/5$ )  
 $mx+8y-14=0$

b)  $mx+y=12$  (Soluc:  $m=-4/3$ ;  $d=107/15$ )  
 $4x-3y=m+1$

c)  $4x-3y+1=0$  (Soluc:  $m=-8$ ;  $d=3/5$ )  
 $mx+6y+4=0$

83. Calcular c para que la distancia entre las rectas  $4x+3y-6=0$  y  $4x+3y+c=0$  sea igual a 3 (Soluc:  $c_1=9$ ,  $c_2=-21$ )



84. Dadas las rectas de la figura adjunta (el dibujo es aproximado), se pide:

a) Razonar que r y s son secantes, y  $r \parallel r'$

b) Hallar  $P=r' \cap s$

c) Hallar la ecuación general de s'

d) Hallar el ángulo entre r y s

e) Hallar  $d(s,s')$

85. Dada la recta  $r: x+y-3=0$  y el punto  $P(-1,2)$ , se pide:
- Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta  $\perp$  a  $r$  que pasa por  $P$  (Soluc:  $x-y+3=0$ )
  - Hallar el punto  $M$  de corte de la recta anterior y  $r$  (Soluc:  $(0,3)$ )
  - Hallar el punto simétrico de  $P$  respecto de  $r$ . Hacer un dibujo aproximado explicativo. (Soluc:  $(1,4)$ )
86. Con los mismos datos del ejercicio anterior, se pide:
- Hallar la ecuación general de la recta  $\parallel$  a  $r$  que pasa por  $P$  (Soluc:  $x+y-1=0$ )
  - Hallar la distancia entre la recta anterior y  $r$ . Hacer un dibujo aproximado explicativo. (Soluc:  $\sqrt{2} u$ )
  - Hallar la posición relativa de  $r$  y la recta  $s: 2x-y+5=0$  (Soluc: *Secantes*)
  - Hallar el ángulo entre  $r$  y  $s$  (Soluc:  $71^\circ 33' 54''$ )

### Bisectriz:

- \* 87. a) Hallar las dos bisectrices del ángulo formado por  $r: 4x+3y-5=0$  y  $s: 3x+4y-2=0$ . Comprobar que se trata de dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que  $r$  y  $s$ .  
(Soluc:  $x-y-3=0; x+y-1=0$ )
- b) Ídem con  $r: 4x-3y+8=0$  y  $s: 12x+5y-7=0$  (Soluc:  $8x+64y-139=0; 112x-14y+69=0$ )
88. Volver a hacer el ejercicio 48, pero aplicando la fórmula de la distancia punto-recta.

### Área del triángulo:

89. a) Calcular el área del triángulo de vértices  $A(1,2)$ ,  $B(-1,4)$  y  $C(2,0)$  (Sol:  $1 u^2$ )
- b) " " " " " "  $A(2,-1)$ ,  $B(-5,1)$  y  $C(0,3)$  (Sol:  $12 u^2$ )
- c) " " " " " "  $A(-3,-2)$ ,  $B(9,7)$  y  $C(2,8)$  (Sol:  $37,5 u^2$ )
90. a) Hallar el área del triángulo definido por las rectas  $r: x=3$ ,  $s: 2x+3y-6=0$ ,  $t: x-y-7=0$  (Sol:  $24/5 u^2$ )
- d) Hallar el área del triángulo definido por las rectas  $r: y=5$ ,  $s: 2x-y-3=0$ ,  $t: x+y-3=0$  (Sol:  $12 u^2$ )
91. Hallar el área del cuadrilátero de vértices  $A(-4,3)$ ,  $B(0,5)$ ,  $C(4,-2)$  y  $D(-3,-2)$  (Soluc:  $71/2 u^2$ )
92. Determinar el área del paralelogramo  $OABC$  y las ecuaciones de los lados  $AB$  y  $BC$  sabiendo que  $OA$  es la recta de ecuación  $x-2y=0$ ,  $OC$  tiene de ecuación  $3x+y=0$  y las coordenadas de  $B$  son  $(3,5)$   
(Soluc:  $AB: 3x+y-14=0; BC: x-2y+7=0; 98/5 u^2$ )