

5

FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Página 126

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

1. Aunque el método para resolver las siguientes preguntas se sistematiza en la página siguiente, puedes resolverlas ahora:

a) ¿Cuántos radianes corresponden a los 360° de una circunferencia?

b) ¿Cuántos grados mide 1 radián?

c) ¿Cuántos grados mide un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes?

d) ¿Cuántos radianes equivalen a 270° ?

a) 2π

b) $\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44,8''$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

d) $\frac{270^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = 3 \frac{\pi}{2}$

Página 128

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 30°

b) 72°

c) 90°

d) 127°

e) 200°

f) 300°

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$

b) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,26 \text{ rad}$

c) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$

d) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 127^\circ \approx 2,22 \text{ rad}$

e) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 200^\circ = \frac{10\pi}{9} \text{ rad} \approx 3,49 \text{ rad}$

f) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \approx 5,24 \text{ rad}$

3. Pasa a grados los siguientes ángulos:

- a) 2 rad b) 0,83 rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) 3,5 rad

a) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 2 = 114^\circ 35' 29,6''$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 0,83 = 47^\circ 33' 19,8''$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36^\circ$

d) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

e) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 3,5 = 200^\circ 32' 6,8''$

4. Completa la siguiente tabla añadiendo las razones trigonométricas (*seno*, *coseno* y *tangente*) de cada uno de los ángulos. Te será útil para el próximo apartado:

GRADOS	0	30		60	90		135	150		210	225		270		330	360
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	

La tabla completa está en el siguiente apartado (página siguiente) del libro de texto. Tan solo falta la última columna, que es igual que la primera.

Página 133

1. Demuestra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

2. Demuestra la fórmula II.3 a partir de la fórmula:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\operatorname{tg} \alpha + (-\operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha (-\operatorname{tg} \beta)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

$$(*) \text{ Como } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

3. Demuestra la fórmula II.3 a partir de las fórmulas:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$$

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{cos}(\alpha - \beta)} = \frac{\text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta}{\text{cos } \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{\frac{\text{sen } \alpha \cos \beta}{\text{cos } \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \text{sen } \beta}{\text{cos } \alpha \cos \beta}}{\frac{\text{cos } \alpha \cos \beta}{\text{cos } \alpha \cos \beta} + \frac{\text{sen } \alpha \text{sen } \beta}{\text{cos } \alpha \cos \beta}} = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \beta} \end{aligned}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $\text{cos } \alpha \cos \beta$.

4. Si $\text{sen } 12^\circ = 0,2$ y $\text{sen } 37^\circ = 0,6$, halla $\text{cos } 12^\circ$, $\text{tg } 12^\circ$, $\text{cos } 37^\circ$ y $\text{tg } 37^\circ$. Calcula, después, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25° , utilizando las fórmulas (I) y (II).

• $\text{sen } 12^\circ = 0,2$

$$\text{cos } 12^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2 12^\circ} = \sqrt{1 - 0,04} = 0,98$$

$$\text{tg } 12^\circ = \frac{0,2}{0,98} = 0,2$$

• $\text{sen } 37^\circ = 0,6$

$$\text{cos } 37^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$$

$$\text{tg } 37^\circ = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

• $49^\circ = 12^\circ + 37^\circ$, luego:

$$\begin{aligned} \text{sen } 49^\circ &= \text{sen}(12^\circ + 37^\circ) = \text{sen } 12^\circ \cos 37^\circ + \cos 12^\circ \text{sen } 37^\circ = \\ &= 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cos } 49^\circ &= \text{cos}(12^\circ + 37^\circ) = \text{cos } 12^\circ \cos 37^\circ - \text{sen } 12^\circ \text{sen } 37^\circ = \\ &= 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664 \end{aligned}$$

$$\text{tg } 49^\circ = \text{tg}(12^\circ + 37^\circ) = \frac{\text{tg } 12^\circ + \text{tg } 37^\circ}{1 - \text{tg } 12^\circ \text{tg } 37^\circ} = \frac{0,2 + 0,75}{1 - 0,2 \cdot 0,75} = 1,12$$

(Podría calcularse $\text{tg } 49^\circ = \frac{\text{sen } 49^\circ}{\text{cos } 49^\circ}$).

• $25^\circ = 37^\circ - 12^\circ$, luego:

$$\begin{aligned} \text{sen } 25^\circ &= \text{sen}(37^\circ - 12^\circ) = \text{sen } 37^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \text{sen } 12^\circ = \\ &= 0,6 \cdot 0,98 - 0,8 \cdot 0,2 = 0,428 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cos } 25^\circ &= \text{cos}(37^\circ - 12^\circ) = \text{cos } 37^\circ \cos 12^\circ + \text{sen } 37^\circ \text{sen } 12^\circ = \\ &= 0,8 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,904 \end{aligned}$$

$$\text{tg } 25^\circ = \text{tg}(37^\circ - 12^\circ) = \frac{\text{tg } 37^\circ - \text{tg } 12^\circ}{1 + \text{tg } 37^\circ \text{tg } 12^\circ} = \frac{0,75 - 0,2}{1 + 0,75 \cdot 0,2} = 0,478$$

5. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} &= \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b} = \\ &= \frac{2 \cos a \cos b}{2 \operatorname{sen} a \cos b} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \end{aligned}$$

6. Demuestra las tres fórmulas (III.1), (III.2) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

7. Halla las razones trigonométricas de 60° a partir de las de 30° .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen}(2 \cdot 30^\circ) = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos(2 \cdot 30^\circ) = \cos^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8. Halla las razones trigonométricas de 90° a partir de las de 45° .

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \cos(2 \cdot 45^\circ) = \cos^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 45^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 45^\circ} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existe.}$$

9. Demuestra que $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Página 134

10. Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

$$\bullet \cos \alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Como por la igualdad fundamental:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

De aquí:

a) Sumando ambas igualdades:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

b) Restando las igualdades ($2^a - 1^a$):

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

• Por último:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha/2}{\cos \alpha/2} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

11. Sabiendo que $\cos 78^\circ = 0,2$, calcula $\operatorname{sen} 78^\circ$ y $\operatorname{tg} 78^\circ$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

• $\cos 78^\circ = 0,2$

$$\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

• $\operatorname{sen} 39^\circ = \operatorname{sen} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$

$$\cos 39^\circ = \cos \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} 39^\circ = \operatorname{tg} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{1 + \cos 78^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

12. Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de $\cos 60^\circ = 0,5$.

• $\cos 60^\circ = 0,5$

• $\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,5}{2}} = 0,5$

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0,5}{2}} = 0,866$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,5}{1 + 0,5}} = 0,577$$

13. Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $\cos 90^\circ = 0$.

- $\cos 90^\circ = 0$

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1$$

14. Demuestra que $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

15. Demuestra que $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Página 135

16. Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- Expresa en función de α y β :

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots \qquad \cos(\alpha - \beta) = \dots$$

- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.
- Sustituye en las expresiones anteriores:

$$\alpha + \beta = A$$

$$\alpha - \beta = B$$

- $$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

$$\text{Sumando} \rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

$$\text{Restando} \rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (2)$$

• Llamando $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

• Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

$$(1) \rightarrow \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(2) \rightarrow \cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

17. Transforma en producto y calcula:

a) $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$

b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$

c) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

$$a) \operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$$

$$= 2 \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$$

$$= 2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$c) \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$$

$$= -2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

18. Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{4a+2a}{2} \cos \frac{4a-2a}{2}}{2 \cos \frac{4a+2a}{2} \cos \frac{4a-2a}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} 3a}{2 \cos 3a} = \operatorname{tg} 3a$$

Página 137

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b) $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

c) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 3$

$$a) \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 60^\circ, x_2 = 300^\circ \\ -1 \rightarrow x_3 = 180^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

$$b) 2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Si $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45^\circ, x_2 = 135^\circ$

- Si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = -45^\circ = 315^\circ, x_4 = 225^\circ$

Todas las soluciones son válidas.

$$c) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ$$

Todas las soluciones son válidas.

$$d) 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{cos} x = 3 \stackrel{(*)}{\rightarrow} 2(1 - \operatorname{cos}^2 x) + 3 \operatorname{cos} x = 3$$

$$(*) \text{ Como } \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{cos}^2 x$$

$$2 - 2 \operatorname{cos}^2 x + 3 \operatorname{cos} x = 3 \rightarrow 2 \operatorname{cos}^2 x - 3 \operatorname{cos} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

Entonces: • Si $\operatorname{cos} x = 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ$

- Si $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow x_2 = 60^\circ, x_3 = -60^\circ = 300^\circ$

Las tres soluciones son válidas.

2. Resuelve:

a) $4 \operatorname{cos} 2x + 3 \operatorname{cos} x = 1$

b) $\operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{cos} x = 0$

c) $\sqrt{2} \operatorname{cos}(x/2) - \operatorname{cos} x = 1$

d) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos}^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0$

$$a) 4 \operatorname{cos} 2x + 3 \operatorname{cos} x = 1 \rightarrow 4(\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3 \operatorname{cos} x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(\operatorname{cos}^2 x - (1 - \operatorname{cos}^2 x)) + 3 \operatorname{cos} x = 1 \rightarrow 4(2 \operatorname{cos}^2 x - 1) + 3 \operatorname{cos} x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 \operatorname{cos}^2 x - 4 + 3 \operatorname{cos} x = 1 \Rightarrow 8 \operatorname{cos}^2 x + 3 \operatorname{cos} x - 5 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0,625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $\operatorname{cos} x = 0,625 \rightarrow x_1 = 51^\circ 19' 4,13'', x_2 = -51^\circ 19' 4,13''$

- Si $\operatorname{cos} x = -1 \rightarrow x_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

$$b) \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 2 \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x / \operatorname{cos} x}{1 - (\operatorname{sen}^2 x / \operatorname{cos}^2 x)} + \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \cos x + \cos x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x (\operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \cos x (\operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x (1 + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ$
- Si $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow x_3 = 210^\circ, x_4 = 330^\circ = -30^\circ$
- Si $\operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_5 = 90^\circ = x_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

$$c) \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} - \cos x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{1 + \cos x} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos x} = 1 + \cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + \cos x = 1 + \cos^2 x + 2 \cos x \rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x (\cos x + 1) = 0$$

- Si $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:

$$x_1 = 90^\circ \text{ y } x_3 = 180^\circ$$

$$d) 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x (\cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \operatorname{sen} x (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x (1 - 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

- Si $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ$
- Si $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ, x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

3. Transforma en producto $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$ y resuelve después la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$.

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos 2x \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } \cos 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ & \rightarrow x_1 = 45^\circ \\ 2x = 270^\circ & \rightarrow x_2 = 135^\circ \\ 2x = 90^\circ + 360^\circ & \rightarrow x_3 = 225^\circ \\ 2x = 270^\circ + 360^\circ & \rightarrow x_4 = 315^\circ \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x_5 = 0^\circ, x_6 = 180^\circ$$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}(\pi - x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos \pi$

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \text{sen } x = 0$

a) $\left. \begin{array}{l} \text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x \\ \cos \pi = -1 \end{array} \right\}$ Entonces, la ecuación queda:

$$\text{sen } x = -\text{sen } x - 1 \rightarrow 2 \text{sen } x = -1 \rightarrow \text{sen } x = \frac{-1}{2}$$

Si $\text{sen } x = \frac{-1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}, x_2 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

Al comprobar vemos:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} \rightarrow \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = \text{sen} \frac{-\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right) = \cos \frac{2\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Luego la solución es válida, pues:

$$\text{sen}(\pi - x) = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos \pi = \frac{1}{2} + (-1)$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{6} \rightarrow \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\left(\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego también es válida esta solución, pues:

$$\text{sen}(\pi - x) = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos \pi = \frac{1}{2} + (-1)$$

Por tanto, las dos soluciones son válidas: $x_1 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ y $x_2 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \text{sen} \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x$

Luego la ecuación queda:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x + \sqrt{2} \text{sen } x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x = 0 \rightarrow$$

$$\cos x + \text{sen } x = 0 \rightarrow \cos x = -\text{sen } x \rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}, x_2 = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Comprobamos que ninguna solución vale. Luego la ecuación no tiene solución.

5. Escribe, en radianes, la expresión general de todos los ángulos que verifican:

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{sen} x = \cos x$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

a) $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ o bien $x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k \pi \text{ rad} = x \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k \pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) Si } \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k \pi \text{ rad} \\ \text{Si } \operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k \pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O bien } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k \pi \text{ rad} \\ \text{O bien } \cos x = 1 \rightarrow x = 2k \pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = k \pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

Página 142

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Grados y radianes

1 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

a) $\frac{2\pi}{3}$

b) $\frac{4\pi}{3}$

c) $\frac{5\pi}{4}$

d) $\frac{7\pi}{6}$

e) $\frac{9\pi}{2}$

• Hazlo mentalmente teniendo en cuenta que π radianes = 180° .

a) 120°

b) 240°

c) 225°

d) 210°

e) 810°

2 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

a) 1,5

b) 3,2

c) 5

d) 2,75

a) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 1,5 = 85^\circ 56' 37''$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 3,2 = 183^\circ 20' 47''$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 5 = 286^\circ 28' 44''$

d) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 2,75 = 157^\circ 33' 48''$

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\text{b) } A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 = 0$$

$$\text{c) } A = -1 - 1 + 0 - 0 = -2$$

7 Expresa con un ángulo del primer cuadrante:

a) $\text{sen } 1215^\circ$ b) $\text{cos } (-100^\circ)$ c) $\text{tg } (-50^\circ)$

d) $\text{cos } 930^\circ$ e) $\text{tg } 580^\circ$ f) $\text{sen } (-280^\circ)$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 1215^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 135^\circ \\ 135^\circ = 180^\circ - 45^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \text{sen } 1215^\circ = \text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ$$

$$\text{b) } 100^\circ = 180^\circ - 80^\circ \rightarrow \text{cos } (-100^\circ) = \text{cos } 100^\circ = -\text{cos } 80^\circ$$

$$\text{c) } \text{tg } (-50^\circ) = \frac{\text{sen } (-50^\circ)}{\text{cos } (-50^\circ)} = \frac{-\text{sen } 50^\circ}{\text{cos } 50^\circ} = -\text{tg } 50^\circ$$

$$\text{d) } \text{cos } 930^\circ \stackrel{(*)}{=} \text{cos } 210^\circ = \text{cos } (180^\circ + 30^\circ) = -\text{cos } 30^\circ$$

$$(*) \text{ } 930^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 210^\circ$$

$$\text{e) } \text{tg } 580^\circ \stackrel{(**)}{=} \text{tg } 220^\circ = \text{tg } (180^\circ + 40^\circ) = \frac{\text{sen } (180^\circ + 40^\circ)}{\text{cos } (180^\circ + 40^\circ)} = \frac{-\text{sen } 40^\circ}{-\text{cos } 40^\circ} = \text{tg } 40^\circ$$

$$(**) \text{ } 580^\circ = 360^\circ + 220^\circ$$

$$\text{f) } \text{sen } (-280^\circ) = \text{sen } (-280^\circ + 360^\circ) = \text{sen } 80^\circ$$

8 Busca, en cada caso, un ángulo comprendido entre 0° y 360° , cuyas razones trigonométricas coincidan con el ángulo dado:

a) 3720° b) 1935° c) 2040°

d) 3150° e) -200° f) -820°

$$\text{a) } 3720^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 120^\circ \rightarrow 120^\circ$$

$$\text{b) } 1935^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 135^\circ \rightarrow 135^\circ$$

$$\text{c) } 2040^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 240^\circ \rightarrow 240^\circ$$

$$\text{d) } 3150^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 270^\circ \rightarrow 270^\circ$$

$$\text{e) } -200^\circ + 360^\circ = 160^\circ \rightarrow 160^\circ$$

$$\text{f) } -820^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 260^\circ \rightarrow 260^\circ$$

9 Halla, en radianes, el ángulo α tal que $\text{sen } \alpha = 0,72$ y $\text{cos } \alpha < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = 0,72 > 0 \\ \text{cos } \alpha < 0 \end{array} \right\} \alpha \in 2^\circ \text{ cuadrante} \rightarrow \alpha \approx 0,8 \text{ rad}$$

10 Indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:

a) 2 rad

b) 3,5 rad

c) 5 rad

• Ten en cuenta que:

$$\frac{\pi}{2} \approx 1,57; \quad \pi \approx 3,14; \quad \frac{3\pi}{2} \approx 4,7; \quad 2\pi \approx 6,28$$

a) 2º cuadrante

b) 3º cuadrante

c) 4º cuadrante

Fórmulas trigonométricas

11 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75° sabiendo que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen} (30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg} (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 3)/3}{(\sqrt{3} - 3)/3} = \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{6} = \\ &= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

NOTA: También podemos resolverlo como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{6 - 2} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4} = \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

12 Sabiendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x :

a) $\operatorname{sen} 2x$

b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

c) $\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

d) $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

e) $\cos \frac{x}{2}$

f) $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

• Tienes que calcular $\cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ y $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, y aplicar las fórmulas.

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} \quad (\text{Negativo, por ser del } 2^\circ \text{ cuadrante}).$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{a) } \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{1 + (-4/5)}} = \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$$

Signo positivo, pues si $x \in 2^\circ$ cuadrante, entonces $\frac{x}{2} \in 1^\circ$ cuadrante.

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \cos \frac{x}{2} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

(*) Signo positivo, porque $\frac{x}{2} \in 1^\circ$ cuadrante.

$$\text{f) } \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi/4}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \pi/4} = \frac{-3/4 + 1}{1 - (-3/4) \cdot 1} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$$

13 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15° de dos formas, considerando:

a) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

b) $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen} (45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,258819 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0,965926 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0,267949 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0,258819 \end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0,9659258$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0,258819}{0,9659258} = 0,2679491$$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

☛ *Saca factor común e iguala a cero cada factor.*

c) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

d) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

e) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$

f) $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

g) $3 \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 2 \cos^2 x - \frac{\operatorname{sen}^2 x + 1}{\cos^2 x} = 0 \\ \cos^2 x \end{aligned} \right\} \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_3 = 90^\circ$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k \pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k \pi \\ x_3 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \pi = k \cdot 180^\circ \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2k \pi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 330^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k \pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k \pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k \pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k \pi$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x &= 1 \rightarrow 1 - 2 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \cos x &= 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k \pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k \pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$e) (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45^\circ, x_2 = 135^\circ$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = 225^\circ, x_4 = 315^\circ$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_3 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$f) 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 210^\circ, x_3 = 330^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$g) \operatorname{tg} x (3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 210^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas.

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Página 143

15 Halla el valor exacto de estas expresiones:

a) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{cos} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$

b) $\operatorname{cos} \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$

c) $\sqrt{3} \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6}$

c) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

16 Sabiendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ y que x es un ángulo del primer cuadrante,

calcula:

a) $\operatorname{sen} 2x$

b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

c) $\operatorname{cos} (30^\circ - x)$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2}{3} \\ x \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \operatorname{cos} x, \operatorname{tg} x &> 0 \\ \frac{x}{2} \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} &\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x/2 > 0 \\ \operatorname{cos} x/2 > 0 \\ \operatorname{tg} x/2 > 0 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$$\bullet \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{a) } \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5}/5}{1 + 2\sqrt{5}/5}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{\frac{25 + 4 \cdot 5 - 20\sqrt{5}}{25 - 4 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{45 - 20\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos(30^\circ - x) &= \cos 30^\circ \cos x + \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{15} + 5}{15} \end{aligned}$$

17 Si $\operatorname{tg} \alpha = -4/3$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

b) $\cos\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg}(900^\circ + \alpha)$

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

Además, $\frac{\alpha}{2} \in 1^{\text{er}}$ cuadrante

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\bullet \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\bullet \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{a) } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \alpha = 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 0 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) &= \cos 180^\circ \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = -\cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-3/5)}{2}} = -\sqrt{\frac{5 - 3}{10}} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{tg}(900^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0 + (-4/3)}{1 - 0 \cdot (-4/3)} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

18 Sabemos que $\cos x = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen} x < 0$. Sin hallar el valor de x , calcula:

a) $\operatorname{sen} x$

b) $\cos(\pi + x)$

c) $\cos 2x$

d) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

f) $\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = -3/4 \\ \operatorname{sen} x < 0 \end{array} \right\} \rightarrow x \in 3^{\text{er}} \text{ cuadrante} \Rightarrow \frac{x}{2} \in 2^{\circ} \text{ cuadrante}$$

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{b) } \cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} x = -\cos x = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = -\sqrt{\frac{1 + 3/4}{1 - 3/4}} = \sqrt{\frac{7}{1}} = \sqrt{7}$$

$$\text{e) } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = \cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{f) } \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \cos \pi \cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} =$$

$$= -\left(-\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1 - 3/4}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

19 Si $\cos 78^\circ = 0,2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$, calcula $\operatorname{sen} 41^\circ$, $\cos 41^\circ$ y $\operatorname{tg} 41^\circ$.

$$41^\circ = 78^\circ - 37^\circ$$

- $\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$

- $\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$

Ahora ya podemos calcular:

- $\operatorname{sen} 41^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ - \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ =$
 $= 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$

- $\cos 41^\circ = \cos(78^\circ - 37^\circ) = \cos 78^\circ \cos 37^\circ + \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ =$
 $= 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$

- $\operatorname{tg} 41^\circ = \frac{\operatorname{sen} 41^\circ}{\cos 41^\circ} = \frac{0,664}{0,748} = 0,8877$

- 20** Si $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4$ y $\operatorname{tg} \alpha = -2$, halla $\operatorname{tg} 2\beta$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \rightarrow 4 = \frac{-2 + \operatorname{tg} \beta}{1 + 2 \operatorname{tg} \beta} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 + 8 \operatorname{tg} \beta = -2 + \operatorname{tg} \beta \rightarrow 7 \operatorname{tg} \beta = -6 \rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{6}{7}$$

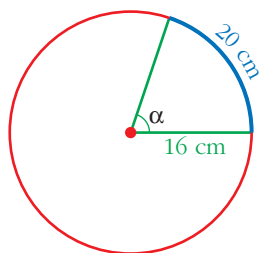
Luego:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot (-6/7)}{1 - 36/49} = \frac{-12/7}{13/49} = \frac{-12 \cdot 49}{7 \cdot 13} = -\frac{84}{13}$$

PARA RESOLVER

- 21** En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central en grados y en radianes.

• *Halla la longitud de la circunferencia y escribe la proporción entre las longitudes de los arcos y la medida de los ángulos.*



Como la circunferencia completa ($\alpha = 100,53$ cm) son 2π rad, entonces:

$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 1,25 = 71^\circ 37' 11''$$

- 22** Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{11\pi}{4}$.

$$0 < \alpha < 2\pi$$

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{4} \rightarrow \frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

- 23** Demuestra que $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$.

• *Aplica las fórmulas de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$. Divide tanto el numerador como el denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$ y simplifica.*

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$.

24 Prueba que $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$.

• Sustituye $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$.

$$\text{Como } \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Y sustituyendo en la expresión:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x &= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x) - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x [1 + \cos x - \cos x]}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

(*) Sacando factor común.

25 Demuestra que $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos x$.

• Desarrolla y sustituye las razones de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) &= \\ &= \left[\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right] - \left[\cos x \cos \frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right] = \\ &= \left[(\cos x) \frac{1}{2} - (\operatorname{sen} x) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] - \left[(\cos x) \left(-\frac{1}{2} \right) - (\operatorname{sen} x) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \cos x \end{aligned}$$

26 Demuestra que $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \cos \beta$.

• Aplica las fórmulas de la diferencia de ángulos, simplifica y extrae factor común.

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) &= \\ &= \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \cos^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \\ &= \cos^2 \alpha \cos \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta \stackrel{(*)}{=} \cos \beta (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \cos \beta \cdot 1 = \cos \beta \end{aligned}$$

(*) Extraemos factor común.

27 Prueba que $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

28 Simplifica: $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$

• Al desarrollar el numerador obtendrás una diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} = \\ & = \frac{2 (\cos 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\cos 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ & = \frac{2 (\cos^2 45^\circ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ & = \frac{2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cos^2 \alpha - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \right]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ & = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

29 Demuestra: $\frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

$$\begin{aligned} \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} &= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \quad (*) \\ &= \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \begin{array}{l} (*) \text{ Dividimos numerador y} \\ \text{denominador entre:} \\ \cos \alpha \cos \beta \end{array} \end{aligned}$$

30 Simplifica la expresión $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ **y calcula su valor para** $\alpha = 90^\circ$.

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Por tanto, si $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$

31 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

b) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$

• Desarrolla $\operatorname{sen} 2x$ y saca factor común.

d) $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

• Desarrolla $\cos 2x$ y sustituye $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$$a) \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \cos 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + \cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos x (\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas:

$$x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_3 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_4 = 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

También podríamos expresar como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x + 1 &= 0 \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\sin x| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas.

Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Página 144

32 Resuelve estas ecuaciones:

a) $4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

☛ Al hacer $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, resulta una ecuación bicuadrada.

Haz $\cos^2 x = z$ y comprueba si son válidas las soluciones que obtienes.

b) $4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$

☛ Divide por $\cos^2 x$ y obtendrás una ecuación con $\operatorname{tg} x$.

c) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$

d) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$

e) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

a) $4(1 - \cos^2 x) \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

$$4 \cos^2 x - 4 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$$

$$4 \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0$$

$$\text{Sea } \cos^2 x = z \rightarrow \cos^4 x = z^2$$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \left\langle$$

$$\left\langle \begin{array}{l} z_1 = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 0^\circ \\ x_2 = 180^\circ \end{array} \right. \\ z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_3 = 45^\circ, x_4 = 315^\circ \\ x_5 = 135^\circ, x_6 = 225^\circ \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 = 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_5 = 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_6 = 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 = 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) Dividiendo por $\cos^2 x$:

$$\frac{4 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \begin{cases} \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36^\circ 52' 11,6'' \\ x_2 = 216^\circ 52' 11,6'' \end{cases} \\ -1 \rightarrow \begin{cases} x_3 = 135^\circ \\ x_4 = 315^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 36^\circ 52' 11,6'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ x_2 &= 216^\circ 52' 11,6'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{6\pi}{5} + 2k\pi \\ x_3 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{5} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{5} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 36^\circ 52' 11,6'' + k \cdot 180^\circ \approx \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x_2 &= 135^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\frac{1 + \cos x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 1 + \cos x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 = \cos x \rightarrow 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \rightarrow$

$\rightarrow 2 = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\cos x| \leq 1 \end{cases}$

Luego:

$$x = k \cdot 360^\circ = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

e) $2 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60^\circ, x_4 = 300^\circ \end{cases}$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

33 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$

b) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$

c) $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$

d) $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$

e) $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

f) $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$

g) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} x = 1$

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ 1/2 \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ, & x_2 = 210^\circ \\ x_3 = 150^\circ, & x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, \quad x_2 = 270^\circ$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \approx \begin{array}{l} -1,366 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\cos x| \leq 1 \\ 0,366 \rightarrow x_3 = 68^\circ 31' 51,1'', \quad x_4 = 291^\circ 28' 8,9'' \end{array}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 68^\circ 31' 51,1'' + k \cdot 360^\circ \approx 0,38\pi + 2k\pi \\ x_4 &= 291^\circ 28' 8,9'' + k \cdot 360^\circ \approx 1,62\pi + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 68^\circ 31' 51,1'' + k \cdot 360^\circ \approx 0,38\pi + 2k\pi \\ x_3 &= 291^\circ 28' 8,9'' + k \cdot 360^\circ \approx 1,62\pi + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \rightarrow x_3 = 0^\circ = x_1 \\ -1/2 \rightarrow x_4 = 240^\circ, x_5 = 120^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_4 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ x_5 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \sqrt{3} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \frac{3 - 3 \cos x}{2} = (1 - \cos x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 - 3 \cos x = 2(1 + \cos^2 x - 2 \cos x) \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 120^\circ, x_3 = 240^\circ \end{cases}$$

Al comprobar vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k \pi \\ x_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k \pi \\ x_3 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

f) $2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow 2 \operatorname{sen} \cos^2 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow$
 $\rightarrow 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow$
 $\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ \\ x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{cases}$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

g) $\frac{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}(\pi/4) \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg} x \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 3) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} x = 3 \rightarrow x_3 = 71^\circ 33' 54,2'', x_4 = 251^\circ 33' 54,2'' \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k \pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k \pi \\ x_3 &= 71^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{2\pi}{5} + 2k \pi \\ x_4 &= 251^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{7\pi}{5} + 2k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 &= 71^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 180^\circ \approx \frac{2\pi}{5} + k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

34 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\text{sen } 3x - \text{sen } x = \cos 2x$

b) $\frac{\text{sen } 5x + \text{sen } 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) $\text{sen } 3x - \cos 3x = \text{sen } x - \cos x$

• *Transforma las sumas o diferencias de senos y cosenos, en productos.*

a) $2 \cos \frac{3x+x}{2} \text{sen } \frac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$2 \cos 2x \text{sen } x = \cos 2x \rightarrow 2 \text{sen } x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\frac{2 \text{sen } 4x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 1 \rightarrow \frac{\text{sen } 4x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\text{sen } (2 \cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2 \text{sen } 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow 2 \text{sen } 2x = 1 \rightarrow \text{sen } 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x &= 30^\circ \rightarrow x_1 = 15^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x &= 150^\circ \rightarrow x_2 = 75^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x &= 390^\circ \rightarrow x_3 = 195^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x &= 510^\circ \rightarrow x_4 = 255^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

c) $\frac{2 \text{sen } 2x \cos x}{-2 \text{sen } 2x \text{sen } x} = \frac{\cos x}{-\text{sen } x} = -\frac{1}{\text{tg } x} = \sqrt{3} \rightarrow \text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150^\circ \\ x_2 = 330^\circ \end{cases}$

Ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\text{sen } 3x - \text{sen } x = \cos 3x - \cos x \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos 2x \text{sen } x = -2 \text{sen } 2x \text{sen } x \rightarrow$ (dividimos entre $2 \text{sen } x$)

$\rightarrow \cos 2x = -\text{sen } 2x \rightarrow \frac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} = -1 \rightarrow \text{tg } 2x = -1 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 315^\circ \rightarrow x_1 = 157,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 135^\circ \rightarrow x_2 = 67,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 675^\circ \rightarrow x_3 = 337,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 495^\circ \rightarrow x_4 = 247,5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$$x = 67,5^\circ + k \cdot 90^\circ \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

35 a) Demuestra que $\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x$.

b) Resuelve la ecuación $\text{sen } 3x - 2 \text{ sen } x = 0$.

• a) Haz $\text{sen } 3x = \text{sen } (2x + x)$ y desarrolla. b) Sustituye $\text{sen } 3x$ por el resultado anterior.

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{sen } 3x &= \text{sen } (2x + x) = \text{sen } 2x \cos x + \cos 2x \text{ sen } x = \\ &= 2 \text{ sen } x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \text{ sen } x = \\ &= 2 \text{ sen } x \cos^2 x + \text{sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x = 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x \end{aligned}$$

b) $\text{sen } 3x - 2 \text{ sen } x = 0 \rightarrow$ por el resultado del apartado anterior:

$$\begin{aligned} 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x - 2 \text{ sen } x &= 0 \rightarrow 3 \text{ sen } x (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^3 x - 2 \text{ sen } x = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 3 \text{ sen } x - 3 \text{ sen}^3 x - \text{sen}^3 x - 2 \text{ sen } x &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 4 \text{ sen}^3 x - \text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x (4 \text{ sen}^2 x - 1) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \text{sen } x = \pm 1/2 \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ, x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{array} \right. \end{aligned}$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 = 30^\circ + k \cdot 180^\circ = (\pi/6) + k \pi \\ x_3 = 150^\circ + k \cdot 180^\circ = (5\pi/6) + k \pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

36 Resuelve:

a) $\text{sen } 3x - \text{sen } x \cos 2x = 0$

b) $\cos 3x - 2 \cos (\pi - x) = 0$

c) $\cos 3x + \text{sen } 2x - \cos x = 0$

• b) Expresa $\cos 3x$ en función de $\text{sen } x$ y $\cos x$ haciendo $\cos 3x = \cos (2x + x)$.

a) Por el ejercicio 35, a): $\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x$.

Luego:

$$\begin{aligned} 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x - \text{sen } x (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x - \text{sen } x \cos^2 x + \text{sen}^3 x &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 2 \text{ sen}^3 x - 2 \text{ sen } x \cos^2 x = 0 \rightarrow \text{sen } x (\text{sen}^2 x - \cos^2 x) &= 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \text{sen}^2 x - \text{cos}^2 x = -\text{cos } 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \rightarrow x_3 = 45^\circ \\ 2x = 270^\circ \rightarrow x_4 = 135^\circ \\ 2x = 450^\circ \rightarrow x_5 = 225^\circ \\ 2x = 630^\circ \rightarrow x_6 = 315^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones (todas válidas) se pueden expresar como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

donde x_1 engloba las dos primeras soluciones obtenidas y x_2 las cuatro restantes.

b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \text{sen } 2x \text{sen } x = \\ &= (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cos x - 2 \text{sen } x \cos x \text{sen } x = \\ &= \cos x (\cos^2 x - \text{sen}^2 x - 2 \text{sen}^2 x) = \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 \text{sen}^2 x) = \cos x (1 - 4 \text{sen}^2 x) \end{aligned}$$

Así, sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned} \cos x (1 - 4 \text{sen}^2 x) - 2(-\cos x) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \cos x (1 - 4 \text{sen}^2 x) + 2 \cos x &= 0 \rightarrow \cos x (1 - 4 \text{sen}^2 x + 2) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \cos x (3 - 4 \cos x) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 60^\circ, x_4 = 120^\circ, x_5 = 240^\circ, x_6 = 300^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Todas las soluciones son válidas y las podemos agrupar, expresándolas como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k \pi \\ x_2 &= 60^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{3} + k \pi \\ x_3 &= 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k \pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio 36 b), para $\cos 3x$ y sustituyendo en la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos x (1 - 4 \text{sen}^2 x) + 2 \text{sen } x \cos x - \cos x &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \cos x (1 - 4 \text{sen}^2 x + 2 \text{sen } x - 1) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \cos x (-4 \text{sen}^2 x + 2 \text{sen } x) &= 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0^\circ \\ x_4 = 180^\circ \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_5 = 30^\circ \\ x_6 = 150^\circ \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones quedan, pues, como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot \frac{\pi}{2} = k \cdot 90^\circ \\ x_2 &= \frac{\pi}{6} + 2k \cdot \pi = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_3 &= \frac{5\pi}{6} + 2k \cdot \pi = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

donde x_1 engloba las cuatro primeras soluciones.

37 Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

b) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

c) $\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

a) $\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) (\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \cdot \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta \end{aligned}$

b) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\begin{aligned} &\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right] \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right] \stackrel{(*)}{=} \\ &= \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] = \\ &= 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \\ &= \sqrt{(1 - \cos \alpha) (1 + \cos \beta) (1 + \cos \alpha) (1 - \cos \beta)} = \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha) (1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

c) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta$$

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \\ &= \left[\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right] \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right] = \\ &= \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{-\beta}{2} \right] \cdot \left[-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{-\beta}{2} \right] = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] = \\ &= 4 \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

(*) Por el apartado b).

38 Expresa $\operatorname{sen} 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$.

- $\operatorname{sen} 4\alpha = \operatorname{sen}(2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha =$
 $= 2 \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) =$
 $= 4 (\operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha)$
- $\cos 4\alpha = \cos(2 \cdot 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha =$
 $= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)^2 - (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)^2 =$
 $= \cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha =$
 $= \cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha - 6 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

39 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 1/2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases}$

• Haz $\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$ y $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$

a) De la segunda ecuación:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

Como:

$$x+y = 120^\circ \rightarrow 2 \cos 60^\circ \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x-y = 60^\circ$$

Así: $x+y = 120^\circ$

$$\underline{x-y = 60^\circ}$$

$$2x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ$$

Luego la solución es: $(90^\circ, 30^\circ)$

b) Como
$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{array} \right\}$$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \\ -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \end{array} \right\}$$

$$(\text{Sumando ambas igualdades}) \rightarrow \underline{-2 \operatorname{sen}^2 y = 0} \rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0^\circ$$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$\cos^2 x - 0 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 = \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ \in 2^\circ \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: $(0^\circ, 0^\circ)$

c) $x+y = 90^\circ \rightarrow$ complementarios $\rightarrow \operatorname{sen} x = \cos y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\cos y + \cos y = 1 \rightarrow 2 \cos y = 1 \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow y = 60^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 90^\circ - y = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Luego la solución es: $(30^\circ, 60^\circ)$

40 Demuestra que para cualquier ángulo α se verifica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

Desarrollamos la segunda parte de la igualdad:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} \cos\alpha + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\alpha\right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\alpha\right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \frac{2}{2} (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \\ &= \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$

41 Demuestra que $\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 2 \operatorname{tg} 2x$.

$$\begin{aligned}\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} &= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x + \operatorname{sen} x)^2} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{4 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \stackrel{(*)}{=} \frac{4 \cdot (\operatorname{sen} x \cos x / \cos^2 x)}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x / \cos^2 x} = \frac{4 \cdot (\operatorname{sen} x / \cos x)}{1 - (\operatorname{sen}^2 x / \cos^2 x)} = \\ &= \frac{4 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2 \cdot \operatorname{tg} 2x\end{aligned}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $\cos^2 x$.

42 Simplifica la expresión $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned}2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) - \operatorname{sen} x = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}{\cos x} - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \left(\frac{1 + \cos x}{\cos x} - 1\right) = \\ &= \operatorname{sen} x \left(\frac{1 + \cos x - \cos x}{\cos x}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right) = \operatorname{tg} x\end{aligned}$$

Página 145

CUESTIONES TEÓRICAS

43 ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de los ángulos que miden $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{4\pi}{5}$ radianes?

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi \rightarrow \text{son suplementarios, luego:}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = \operatorname{sen} \left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5}; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = -\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$$

44 Relaciona estas expresiones con las razones trigonométricas del ángulo α :

a) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$; $\operatorname{cos}(\pi - \alpha)$; $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$

b) $\operatorname{sen}(\pi + \alpha)$; $\operatorname{cos}(\pi + \alpha)$; $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$

c) $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$; $\operatorname{cos}(2\pi - \alpha)$; $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\pi + \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

c) $\begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(2\pi - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

45 Expresa $A(x)$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$:

a) $A(x) = \operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen}(\pi - x)$

b) $A(x) = \operatorname{cos}(-x) + \operatorname{cos}(\pi + x)$

c) $A(x) = \operatorname{sen}(\pi + x) + \operatorname{cos}(2\pi - x)$

a) $A(x) = \operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen}(\pi - x) = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x$

b) $A(x) = \operatorname{cos}(-x) + \operatorname{cos}(\pi + x) = \operatorname{cos} x + (-\operatorname{cos} x) = 0$

c) $A(x) = \operatorname{sen}(\pi + x) + \operatorname{cos}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$

46 Demuestra que si α , β y γ son los tres ángulos de un triángulo, se verifica:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen} \gamma = 0$

b) $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) + \operatorname{cos} \gamma = 0$

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma = 0$

• Ten en cuenta que $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ y las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de los ángulos suplementarios.

Como en un triángulo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, entonces:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(180^\circ - \gamma) = \operatorname{sen} \gamma \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen} \gamma = 0$

b) $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{cos} \gamma \rightarrow \operatorname{cos}(\alpha + \beta) + \operatorname{cos} \gamma = 0$

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{tg} \gamma \rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma = 0$

47 Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, se verifica:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

• Haz $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ y desarrolla $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)$.

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ &\rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{tg} \gamma \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Así, sustituyendo:

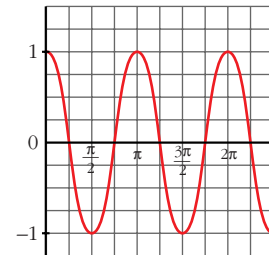
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta) + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta) - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{-\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \text{(sacando factor común)} \\ &= \frac{-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta [-\operatorname{tg}(\alpha + \beta)] \stackrel{(*)}{=} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

$$(*) \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

- 48** Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = \cos 2x$, dando a x valores comprendidos entre 0 y 2π radianes y representála gráficamente.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \cos 2x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	2π
0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0	0

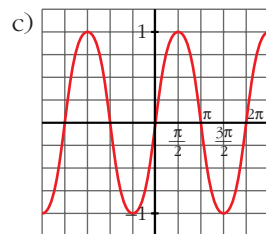
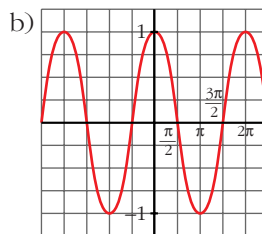
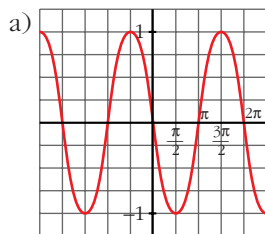


- 49** Representa las funciones:

a) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



PARA PROFUNDIZAR

50 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

$$\text{a) } \begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = \sqrt{3} \\ \text{cos } x + \text{cos } y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 y = 3/4 \\ \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 y = 1/4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \text{cos } (x + y) = 1/2 \\ \text{sen } (x - y) = 1/2 \end{cases}$$

a) Despejando en la segunda ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \text{cos } x = 1 - \text{cos } y^{(*)} \\ \text{Como } \text{sen } x = \sqrt{1 - \text{cos}^2 x} \end{array} \right\} \text{ entonces:}$$

$$\text{sen } x = \sqrt{1 - (1 - \text{cos } y)^2} = \sqrt{1 - 1 - \text{cos}^2 y + 2 \text{cos } y} = \sqrt{2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y}$$

Y, sustituyendo en la primera ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{sen } x + \text{sen } y = \sqrt{3} &\rightarrow \sqrt{2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y} + \text{sen } y = \sqrt{3} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{sen } y = \sqrt{3} - \sqrt{2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y} \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\text{sen}^2 y = 3 + (2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y) - 2 \sqrt{3} (2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y)$$

$$\text{sen}^2 y + \text{cos}^2 y - 2 \text{cos } y - 3 = -2 \sqrt{3} (2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y)$$

$$1 - 2 \text{cos } y - 3 = -2 \sqrt{3} (2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y)$$

$$-2 (1 + \text{cos } y) = -2 \sqrt{3} (2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y)$$

Simplificamos y volvemos a elevar al cuadrado:

$$(1 + \text{cos } y)^2 = 3 (2 \text{cos } y - \text{cos}^2 y) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + \text{cos}^2 y + 2 \text{cos } y = 6 \text{cos } y - 3 \text{cos}^2 y \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \text{cos}^2 y - 4 \text{cos } y + 1 = 0 \rightarrow \text{cos } y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 60^\circ$$

Sustituyendo en (*), se tiene:

$$\text{cos } x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \text{Sumando:}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cos}^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + \operatorname{cos}^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \operatorname{cos}^2 y = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 y = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{cos} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 45^\circ$$

(Solo consideramos las soluciones del primer cuadrante).

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}$$

Nos quedamos con la solución positiva, por tratarse del primer cuadrante. Así:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ$$

Luego la solución es: $(30^\circ, 45^\circ)$

$$\text{c) Como } x, y \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \left. \begin{array}{l} \text{y además } \operatorname{cos}(x+y) > 0 \\ \operatorname{sen}(x-y) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \\ x-y \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \end{array} \right.$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\operatorname{cos}(x+y) = \frac{1}{2} \rightarrow x+y = 60^\circ$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \rightarrow x-y = 30^\circ \text{ (Sumamos ambas ecuaciones)}$$

$$2x = 90^\circ \rightarrow x = 45^\circ$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando:

$$y = 60^\circ - x = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

La solución es, por tanto: $(45^\circ, 15^\circ)$

51 Demuestra que:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2}$$

$$\text{b) } \operatorname{cos} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}$$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

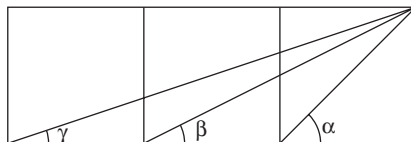
$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x) \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$$

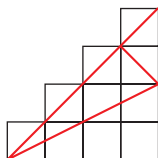
$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2 \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\cos x} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot (1 + \cos x)^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{1}{\cos x} \sqrt{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

52 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$.



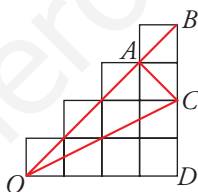
- a) Puedes realizar la demostración recurriendo a la fórmula de la tangente de una suma.
- b) Hay una posible demostración, más sencilla y elegante que la anterior, reconociendo los ángulos α , β y γ en la siguiente figura:



$$a) \left. \begin{aligned} \text{tg}(\beta + \gamma) &= \frac{\text{tg} \beta + \text{tg} \gamma}{1 - \text{tg} \beta \text{tg} \gamma} = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = \frac{5/6}{1 - 1/6} = \frac{5/6}{5/6} = 1 \\ \text{tg} \alpha &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Así, vemos que } \text{tg}(\beta + \gamma) &= \text{tg} \alpha \\ \text{Como } \alpha, \beta, \gamma &\in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \end{aligned} \right\} \beta + \gamma = \alpha$$

- b) $\alpha = \widehat{BOD}$. Basta observar que se trata de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo que se forma con la diagonal de un cuadrado.



$\beta = \widehat{COD}$, por ser el ángulo agudo menor de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden cuatro y dos unidades; igual (por semejanza) al formado por catetos de dos y una unidad.

$\gamma = \widehat{AOC}$, pues, tomando las diagonales de los cuadrados pequeños por unidades, se trata del ángulo menor del triángulo rectángulo de catetos 3 y 1 unidades (OA y AC, respectivamente).

Así, podemos observar fácilmente en el dibujo que $\alpha = \beta + \gamma$, pues:

$$\widehat{BOD} = \widehat{AOD} = \widehat{AOC} + \widehat{COD}$$

53 Obtén la fórmula siguiente:

$$\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha = \sqrt{2} \text{cos}(\alpha - 45^\circ)$$

• Expresa el primer miembro como suma de senos y aplica la fórmula correspondiente.

$$\text{cos } \alpha = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

Sustituyendo en el primer miembro de la igualdad y desarrollando (transformaremos en producto):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha &= \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + (90^\circ - \alpha)}{2} \cos \frac{\alpha - (90^\circ - \alpha)}{2} = \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{2} \cos \frac{2\alpha - 90^\circ}{2} = \\ &= 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos (\alpha - 45^\circ) = \\ &= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos (\alpha - 45^\circ) \end{aligned}$$