INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El estudiante deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de la capacidad gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO MÁXIMO: Una hora y media.
CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Dado el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real *a*.

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a) **Discutir el sistema para los distintos valores de *a*.**
(b) **Resolver el sistema para *a* = 3 y *a* = 1.**

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}.$$

(a) **Encontrar su dominio de definición**
(b) **Estudiar su continuidad.**
(c) **Calcular sus asíntotas, si las hubiera.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.
(a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.
(b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcular:
(a) El intervalo de confianza para la recaudación media con un nivel de confianza del 99 %.
(b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria media menor de 127 euros.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de la clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros y de 206 euros para la clase preferente.
¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo? Indicar dicho beneficio.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ **satisface las siguientes propiedades:**

- **Pasa por el punto (0, 0).**
- **Tiene un máximo local en el punto (1, 2).**

Se pide:
(a) Obtener el valor de los coeficientes *a*, *b* y *c*.
(b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$**, el eje *OX* y la recta $x = 1$.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B), \qquad P(A \cap B), \qquad P(\overline{A} / B), \qquad P(\overline{B} / A)$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El tiempo invertido en cenar por cada cliente de una cadena de restaurantes es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 32 minutos. Se quiere estimar la media de dicho tiempo con un error no superior a 10 minutos, y con un nivel de confianza del 95 %.
Determinar el tamaño mínimo muestral necesario para poder llevar a cabo dicha estimación.

SOLUCIONES DE LA OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(a) Transformamos el sistema aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ (1-a)y = 0 \end{cases}$$

A partir de la tercera ecuación se puede deducir:

- Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado, y su solución será: $y = 0$; $z = 2/a$; $x = 1 - z = 1 - 2/a$.
- Si $a = 1$, el sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ 0y = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

(b) Si $a = 3$, el sistema que es compatible determinado, queda $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ -2y = 0 \end{cases}$.

Su solución, que obtenemos de abajo arriba es: $y = 0$; $z = 2/3$; $x = 1/3$.

Si $a = 1$, el sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 - y \\ z = 2 - 2y \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

EJERCICIO 2

a) La función no está definida cuando se anula el denominador: cuando $x^2 - 3x + 2 = 0$, cuyas soluciones son x = 1 y x = 2.
Por tanto, Dom(f) = **R** – {1, 2}.

b) Por lo dicho en el punto anterior la función es discontinua en x = 1 y en x = 2. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite de la función en ambos puntos.

En x = 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x-2} = -1.$$

Como el límite existe, la discontinuidad puede evitarse. Se evita definiendo $f(1) = -1$.

En x = 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{0} = \infty .$$

En este caso, la discontinuidad no puede evitarse.

c) El resultado del límite anterior nos informa que la función tiene una asíntota vertical, la recta $x = 2$.

También tiene otra asíntota horizontal, pues $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$. La ecuación de esta asíntota es $y = 1$.

EJERCICIO 3

Con los datos del problema se puede construir la siguiente tabla.

	Marca A	Marca B	Marca C	Total
Número	100	60	40	200
Probabilidad de estar caducado	0,01	0,02	0,03	
Número esperado de yogures en mal estado	100 · 0,01 = 1	60 · 0,02 = 1,2	40 · 0,03 = 1,2	3,6

Con esto, y como puede leerse directamente en la tabla:

a) P(un yogur esté caducado) = P(marca A) · P(caducado/marca A) +
+ P(marca B) · P(caducado/marca B) +
+ P(marca C) · P(caducado/marca C) =

$$= \frac{100}{200} \cdot 0{,}01 + \frac{60}{200} \cdot 0{,}02 + \frac{40}{200} \cdot 0{,}03 = \frac{3{,}6}{200} = 0{,}018$$

b) $$\text{P(marca B/caducado)} = \frac{\text{P(marca B)} \cdot \text{P(caducado/marca B)}}{\text{P(caducado)}} = \frac{\frac{60}{200} \cdot 0{,}02}{\frac{3{,}6}{200}} = \frac{1{,}2}{3{,}6} = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 4

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\overline{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 – α.

En este caso $\overline{x} = 1248$, $\sigma = 328$, $n = 100$; y $Z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\left(1248 - 2{,}575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}},\ 1248 + 2{,}575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (1248 - 84{,}46,\ \ 1248 + 84{,}46) = (1163{,}54,\ \ 1332{,}46)$$

b) El error admitido, E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En nuestro caso, para una confianza del 95 %, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$, $\sigma = 328$ y $E < 127$, se tendrá:

$$1{,}96 \frac{328}{\sqrt{n}} < 127 \ \Rightarrow\ \sqrt{n} > \frac{1{,}96 \cdot 328}{127} = 5{,}06 \ \Rightarrow\ n > 25{,}6$$

El tamaño muestral debe ser 26 o más comercios.