OPCIÓN A.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg de aluminio y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende esta?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4}.$$

(a) Encontrar las asíntotas de la función.
(b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30% de la primera, el 25% de la segunda y el 45% de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2%, mientras que dicha proporción es 0,5% en la segunda, y 0,1% en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 310 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la duración media de ese modelo de batería.

OPCIÓN B.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real *a*.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 3 \end{cases}.$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de *a*.
(b) Resolver el sistema para *a* = 2.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2, \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El peso en kg de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60 kg y desviación típica 8 kg. Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

(a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral.
(b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 kg?

SOLUCIÓN. OPCIÓN A.

EJERCICIO 1

Se trata de un problema de programación lineal.

Con los datos anteriores se obtiene la tabla:

	Cantidad	Aluminio	Trabajo	Ganancia
Lámina fina	x	5x	10x	45x
Lámina gruesa	y	20y	15y	80y
Disponibilidades		400 kg	450 h	

El objetivo es maximizar la ganancia, que es:

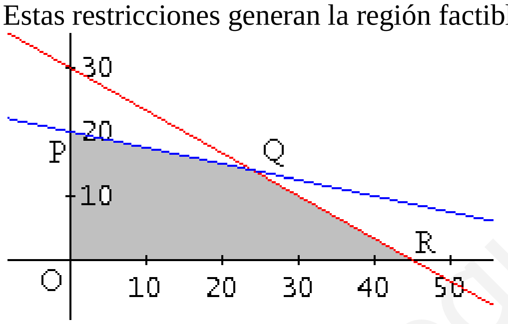
$$G(x, y) = 45x + 80y$$

restringida por: $5x + 20y \leq 400$

$10x + 15y \leq 450$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura:



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 20), Q: $\begin{cases} 5x + 20y = 400 \\ 10x + 15y = 450 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (24, 14) y R = (45, 0).

Como sabemos, los valores máximos y mínimos de la función objetivo se encuentran en alguno de esos vértices.

La ganancia para cada una de esas soluciones es:

En O, G(0, 0) = 0.

En P, G(0, 20) = 1600 €

En Q, G(24, 14) = 2200 €

En R, G(45, 0) = 2025 €.

La ganancia máxima, que asciende a 2200 euros, se obtiene fabricando 24 láminas finas y 14 gruesas.

EJERCICIO 2

(a) La curva tiene asíntotas verticales en los puntos que anulan al denominador, que son x = –2 y x = 2, pues:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left(\frac{-12}{0}\right) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left(\frac{-12}{0}\right) = \infty$$

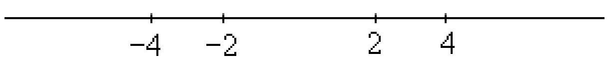
Las asíntotas son las rectas x = –2 y x = 2.

También tiene una asíntota horizontal, pues

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-16}{x^2-4} = 1$$

La asíntota es la recta y = 1.

(b) Como los términos de la fracción algebraica se anulan en los puntos x = –4, x = 4, x = –2 y x = 2, hay que estudiar el signo en los intervalos que se indican en la siguiente recta real



- Si x < –4, el numerador y el denominador de $f(x)$ son positivos $\Rightarrow$ $f(x)$ es positiva.
- Si –4 < x < –2, el numerador es negativo y el denominador positivo $\Rightarrow$ $f(x)$ es negativa.
- Si –2 < x < 2, el numerador y el denominador de $f(x)$ son negativos $\Rightarrow$ $f(x)$ es positiva.
- Si 2 < x < 4, el numerador es negativo y el denominador positivo $\Rightarrow$ $f(x)$ es negativa.
- Si x > 4, el numerador y el denominador de $f(x)$ son positivos $\Rightarrow$ $f(x)$ es positiva.

EJERCICIO 3

Con los datos del problema se puede construir la siguiente tabla.

	Reserva I	Reserva II	Reserva III	Total
Total tigres (%)	30	25	45	100
Albinos por reserva (%)	0,2 % de 30 = 0,06	0,5 % de 25 = 0,125	0,1 % de 45 = 0,045	0,23

Con esto, y como puede leerse directamente en la tabla:

P(tigre albino) = P(Reserva I) · P(Albino/Reserva I) +
+ P(Reserva II) · P(Albino/Reserva II) +
+ P(Reserva III) · P(Albino/Reserva III) =
= 30 · 0,002 + 25 · 0,005 + 45 · 0,001 = 0,23

EJERCICIO 4

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 – α.

En este caso $\bar{x} = \dfrac{33+34+26+37+30+39+26+31+36+19}{10} = 31{,}1$; σ = 5; el tamaño muestral es n = 10; y $Z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\left(31{,}1 - 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{10}},\ 31{,}1 + 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = (31{,}1 - 3{,}1,\ \ 31{,}1 + 3{,}1) = (28,\ 34{,}2)$$