OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 g de harina de trigo y 300 de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración de B contiene 200 g de harina de trigo y 100 g de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$**. Se pide:**

- **(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa x = 1.**
- **(b) Hallar las asíntotas de la curva.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

- **(a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en ese colectivo consulto InfoBolsaWeb.**
- **(b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La duración de las baterías de un determinado modelo de teléfono móvil tiene una distribución normal de media 34,5 horas y desviación típica 6,9 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 teléfonos móviles.

- **(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 32 y 33,5 horas.**
- **(b) ¿Y de que sea mayor de 38 horas?**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real *p*.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+pz=-3 \\ x-2y-z=p \end{cases}.$$

(a) Discutir el sistema según los distintos valores de *p*.
(b) Resolver el sistema para *p* = 2.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Sea considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$$

(a) Hallar sus asíntotas.
(b) Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

Ejercicio 3. (puntuación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{B})=\frac{2}{5}$ **y** $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$. **Calcular:**

(a) $P(B|A)$.

(b) $P(\overline{A}|B)$

Nota: $\overline{A}$ **representa el suceso complementario del suceso A.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0,2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?

RESPUESTA

Opción A

Ejercicio 1

Se trata de un problema de programación lineal.

Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	H. trigo	H. maíz	V. energético
Preparado A	x	200x	300x	600x
Preparado B	y	200y	100y	400y
Disponibilidades		24000 g	15000 g	

El objetivo es maximizar el valor energético. Esto es:

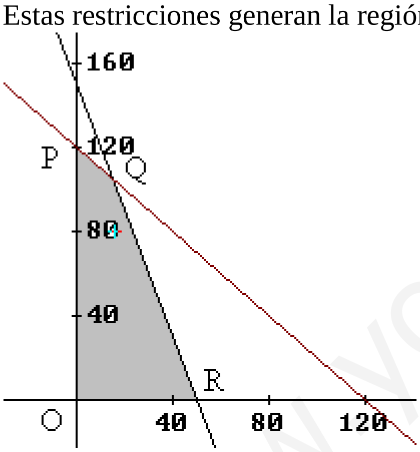
Maximizar $V(x, y) = 600x + 400y$

restringido por: $200x + 200y \leq 24000 \;\Leftrightarrow\; x + y \leq 120$

$300x + 100y \leq 15000 \;\Leftrightarrow\; 3x + y \leq 150$

$x \geq 0;\; y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 120),

$$Q: \begin{cases} x + y = 120 \\ 3x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow Q = (15, 105) \text{ y } R = (50, 0).$$

Como sabemos, los valores máximos y mínimos se encuentran en alguno de esos vértices.

El valor calorífico para cada nivel de preparados es:

En O, V(0, 0) = 0.

En P, V(0, 120) = 48000 cal

En Q, V(15, 105) = 51000 cal.

En R, V(50, 0) = 30000 cal.

El máximo, que es 51000 calorías, se obtiene fabricando 15 preparados del tipo A y 105 del tipo B.

Ejercicio 2

(a) La ecuación de la tangente será $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, donde $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

$$f(1) = \frac{1}{2};\ f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} \rightarrow\ f'(1) = 1$$

Por tanto, la tangente es:

$$y - \frac{1}{2} = x - 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - \frac{1}{2}$$

(b) La curva no tiene asíntotas verticales, pues su denominador no se anula en ningún caso.
Tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1 \text{ y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$$

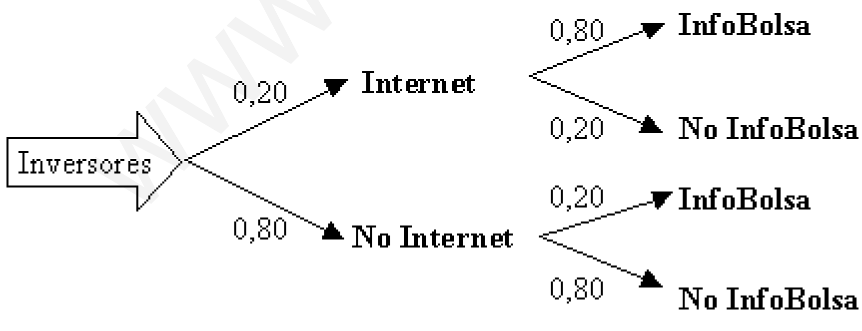
La asíntota es la recta y = x.

Ejercicio 3

Las probabilidades dadas son:

P(Internet) = 0,20 $\Rightarrow$ P(no Internet) = 0,80
P(InfoBolsa/Internet) = 0,80 $\Rightarrow$ P(No InfoBolsa/Internet) = 0,20
P(InfoBolsa/No Internet) = 0,20 $\Rightarrow$ P(No InfoBolsa/No Internet) = 0,80

El diagrama de árbol sería el siguiente.



(a) Con esto:

P(inversor consulte InfoBolsa) =
= P(Internet) · P(InfoBolsa/Internet) +
+ P(no Internet) · P(InfoBolsa/No Internet) =
= 0,20 · 0,80 + 0,80 · 0,20 = 0,32

(b) P(Internet/InfoBolsa) = [P(Internet) · P(InfoBolsa/Internet)] : P(InfoBolsa) =

$$= \frac{0{,}20 \cdot 080}{0{,}32} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 4

La media de las muestras de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ. σ), se distribuye según una normal $N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso (μ = 34,5, σ = 6,9, n = 36), se distribuirán según la normal

$N\left(34{,}5;\ \frac{6{,}9}{\sqrt{36}}\right) \Leftrightarrow N(34{,}5; 1{,}15)$, que se tipifica haciendo $Z = \frac{\overline{X} - 34{,}5}{1{,}15}$

Con esto,

(a) $P(32 < \overline{X} < 33{,}5) = \mathrm{P}\left(\frac{32 - 34{,}5}{1{,}15} < Z < \frac{33{,}5 - 34{,}5}{1{,}15}\right)$ = P(–2.17 < Z < –0,87) =

= P(Z < –0,87) – P(Z < –2,17) = 1 – 0,8078 – (1 – 0,9850) = 0,1772

(b) $P(\overline{X} > 38) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{38 - 34{,}5}{1{,}15}\right)$ = P(Z > 3,04) = 1 – 0,9988 = 0,0012