Junio de 2006

OPCIÓN A

1.A.- Dado el sistema homogéneo: $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$, averiguar para que valores de ***k*** tiene soluciones distintas de ***x = y = z = 0***. Resolverlo en cada caso

Si la solución es distinta a la trivial el sistema es Compatible Indeterminado y, por ello, el determinante de los coeficientes es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k(k+1) - k - (k+1) - 1 = k^2 + k - k - k - 1 - 1 = k^2 - k - 2 \Rightarrow$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1+3}{2} = 2 \\ k = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$Si\ k = 2$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x \Rightarrow x + 2.(-3x) - z = 0 \Rightarrow -5x - z = 0 \Rightarrow z = -5x \Rightarrow$$

$Solución\ (\lambda\ , -3\lambda\ , -5\lambda)$

$Si\ k = -1$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 0 - z = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$$

$Solución\ (\mu\ , 0\ , \mu)$

2.A.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que ***AP=PA***

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2a+b\\ c & 2c+d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=a\\ b+2d=2a+b\\ c=c\\ d=2c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ d=d\\ a=d\\ b\end{cases}$$

$$P=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

3.A.- a) Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$,indicando su dominio, intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas

b) Demostrar que la sucesión $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente

c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a_{n+1}-a_n\right)$

$a)$

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}$$

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{-1\}$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow Creciente\ si\ f'(x)>0\Rightarrow\frac{2}{(x+1)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\(x+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}\Rightarrow$$

$Creciente\ \forall x\in\Re$

Asíntotas verticales

$$x=-1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2.(-1)}{-1^-+1}=\dfrac{-2}{0^-}=\infty\\\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2.(-1)}{-1^++1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{1+0}=2\Rightarrow y=2\Rightarrow x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)}{(-x)+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{-x+1}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot\frac{x}{x}}{-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{-1+\frac{1}{x}}=\frac{2}{-1+\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{-1+0}=2\Rightarrow$$

$$y=2\Rightarrow x\to-\infty$$

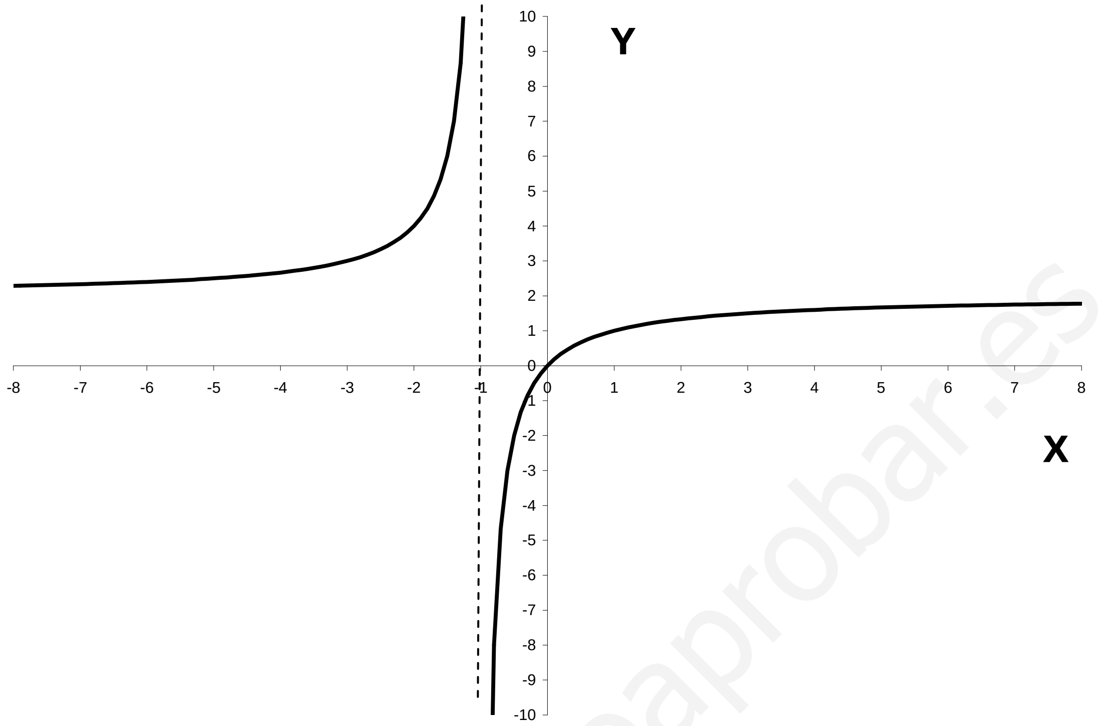
Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{\infty}=0\Rightarrow\nexists\ asíntota\ oblicua\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)}{(-x)(-x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{-x+1}=\frac{2}{-\infty}=0\Rightarrow\nexists\ asíntota\ oblicua\to-\infty$$

Continúa el problema 3.A.-

a) Continuación



b)

$$\text{Creciente cuando } a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - (2n^2 + 4n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

$$\text{Como } \forall n \in N \Rightarrow \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow \text{Sucesión monotona creciente}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + 3\frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} =$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{3}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \frac{2}{1+0+0} = 2$$

4.A.- Sean las rectas $r:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-4}$ $\;y\;$ $s:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$

a) Hallar la ecuación de la recta ***t*** que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores

b) Hallar la recta perpendicular común a las rectas ***r*** y ***s***.

$a)$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,-2)\Rightarrow r:\begin{cases}-1-\lambda\\ 2+\lambda\\ -2\lambda\end{cases} \\ \qquad\qquad s:\begin{cases}2+3\mu\\ -1+\mu\\ -2+\mu\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{v_t}=(-1-\lambda-2-3\mu\,,\,2+\lambda+1-\mu\,,\,-2\lambda+2-\mu)$$

$$t:\frac{x+1+\lambda}{-\lambda-3\mu-3}=\frac{y-2-\lambda}{\lambda-\mu+3}=\frac{z+2\lambda}{-2\lambda-\mu+2}\Rightarrow Con\ O(0\,,0\,,0)\Rightarrow$$

$$\frac{0+1+\lambda}{-\lambda-3\mu-3}=\frac{0-2-\lambda}{\lambda-\mu+3}=\frac{0+2\lambda}{-2\lambda-\mu+2}\Rightarrow\begin{cases}(1+\lambda)(\lambda-\mu+3)=(-2-\lambda)(-\lambda-3\mu-3)\\ 2\lambda(\lambda-\mu+3)=(-2-\lambda)(-2\lambda-\mu+2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda-\mu+3+\lambda^2-\mu\lambda+3\lambda=2\lambda+6\mu+6+\lambda^2+3\mu\lambda+3\lambda\\ 2\lambda^2-2\lambda\mu+6\lambda=4\lambda+2\mu-4+2\lambda^2+\mu\lambda-2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\lambda-7\mu-3-4\mu\lambda=0\\ -3\lambda\mu+4\lambda-2\mu+4=0\end{cases}$$

$$-\lambda(1+4\mu)=7\mu+3\begin{cases}-\lambda(1+4\mu)=7\mu+3\Rightarrow\lambda=-\dfrac{7\mu+3}{1+4\mu}\\ \lambda(4-3\mu)=2\mu-4\Rightarrow\lambda=\dfrac{2\mu-4}{4-3\mu}\end{cases}\Rightarrow-\frac{7\mu+3}{1+4\mu}=\frac{2\mu-4}{4-3\mu}\Rightarrow$$

$$-(7\mu+3)(4-3\mu)=(2\mu-4)(1+4\mu)\Rightarrow-(28\mu-21\mu^2+12-9\mu)=2\mu+8\mu^2-4-16\mu\Rightarrow$$

$$-19\mu+21\mu^2-12=-14\mu+8\mu^2-4\Rightarrow13\mu^2-5\mu-8=0\Rightarrow\Delta=25+4.13.8=25+416=441>0$$

$$\mu_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{441}}{26}\Rightarrow\begin{cases}\mu_1=\dfrac{5+21}{26}=1\Rightarrow\lambda=\dfrac{2.1-4}{4-3.1}=-2\\ \mu_2=\dfrac{5-21}{26}=-\dfrac{16}{26}=-\dfrac{8}{13}\Rightarrow\lambda=\dfrac{2\cdot\left(-\frac{8}{13}\right)-4}{4-3\cdot\left(-\frac{8}{13}\right)}=\dfrac{\frac{-16-52}{13}}{\frac{52-24}{13}}=-\dfrac{68}{28}=-\dfrac{17}{7}\end{cases}$$

$$Cuando\begin{cases}\mu=1\\ \lambda=-2\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_t}=[-(-2)-3.1-3\,,\,(-2)-1+3\,,\,-2(-2)-1+2]=(-4\,,0\,,5)\Rightarrow$$

$$\frac{x+1+(-2)}{-4}=\frac{y-2-(-2)}{0}=\frac{z+2(-2)}{5}\Rightarrow\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{0}=\frac{z-4}{5}$$

$$Cuando\begin{cases}\mu=-\dfrac{8}{13}\\ \lambda=-\dfrac{17}{7}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_t}=\left(\frac{116}{91}\,,\frac{220}{91}\,,\frac{680}{91}\right)=(29\,,55\,,170)\Rightarrow\frac{x-\frac{10}{7}}{29}=\frac{y+\frac{3}{7}}{55}=\frac{z+\frac{34}{7}}{170}$$

Continúa el problema 4.A.-

b) El vector de la recta p buscada es perpendicular a los vectores directores de las rectas dadas r y s, por lo tanto sus productos escalares son nulos. Después hallaremos uno de los puntos de corte A y así tendremos la ecuación de la recta p

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{v_p} = (-3-\lambda-3\mu\ ,\ 3+\lambda-\mu\ ,\ 2-2\lambda-\mu) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,1\ ,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_p} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}.\overrightarrow{v_r} = 0 \\ \begin{cases} \overrightarrow{v_p} = (-3-\lambda-3\mu\ ,\ 3+\lambda-\mu\ ,\ 2-2\lambda-\mu) \\ \overrightarrow{v_s} = (3\ ,1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_p} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}.\overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (-3-\lambda-3\mu\ ,\ 3+\lambda-\mu\ ,\ 2-2\lambda-\mu)\cdot(-1\ ,1\ ,-2) \Rightarrow 3+\lambda+3\mu+3+\lambda-\mu-2(2-2\lambda-\mu)=0 \\ (-3-\lambda-3\mu\ ,\ 3+\lambda-\mu\ ,\ 2-2\lambda-\mu)\cdot(3\ ,1\ ,1) = 3\cdot(-3-\lambda-3\mu)+3+\lambda-\mu+2-2\lambda-\mu=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6+2\lambda+2\mu-4+4\lambda+2\mu=0 \Rightarrow 2+6\lambda+4\mu=0 \Rightarrow 1+3\lambda+2\mu=0 \\ -9-3\lambda-9\mu+5-\lambda-2\mu=0 \Rightarrow -4-4\lambda-11\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+12\lambda+8\mu=0 \\ -12-12\lambda-33\mu=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-8-25\mu \Rightarrow \mu = -\frac{8}{25} \Rightarrow 1+3\lambda+2\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=0 \Rightarrow 3\lambda = \frac{16}{25}-1=-\frac{9}{25} \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{25} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_p} = \left[-3-\left(-\frac{3}{25}\right)-3\left(-\frac{8}{25}\right),\ 3+\left(-\frac{3}{25}\right)-\left(-\frac{8}{25}\right),\ 2-2\left(-\frac{3}{25}\right)-\left(-\frac{8}{25}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v_p} = \left(\frac{-75+3+24}{25}\ ,\ \frac{75-3+8}{25}\ ,\ \frac{50+6+8}{25}\right) = \left(\frac{48}{25}, \frac{80}{25}, \frac{64}{25}\right) \equiv (3\ ,5\ ,4)$$

$$A\begin{cases} x = -1-\lambda = -1-\left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{-25+3}{25} = -\frac{22}{25} \\ y = 2+\lambda = 2+\left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{50-3}{25} = \frac{47}{25} \\ z = -2\lambda = -2\cdot\left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow p: \begin{cases} x = -\frac{22}{25}+3\gamma \\ y = \frac{47}{25}+5\gamma \\ z = \frac{6}{25}+4\gamma \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.B.-Sea ***r*** la recta que pasa por el origen de coordenadas ***O*** y tiene como vector director $\vec{v} = (4\ ,\ 3\ ,\ 1)$. Hallar el punto ***P*** contenido en dicha recta tal que si se llama ***Q*** a su proyección sobre el plano ***z = 0*** , el triángulo ***OPQ*** tenga área 1.

$$r : \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow P(4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ \lambda) \Rightarrow \text{Proyección de } P \text{ sobre } \pi \Rightarrow v_\pi = (0\ ,\ 0\ ,\ 1) \Rightarrow s : \begin{cases} x = 4\lambda + 0\mu = 4\lambda \\ y = 3\lambda + 0\mu = 3\lambda \Rightarrow \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

$$\text{Intersección de } s \text{ con el plano } \pi \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \Rightarrow P(4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ \lambda) - (0\ ,\ 0\ ,\ 0) = (4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ \lambda) \\ \overrightarrow{OQ} = (4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ 0) - (0\ ,\ 0\ ,\ 0) = (4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ 0) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 \vec{j} + 12\lambda^2 \vec{k} - 12\lambda^2 \vec{k} + 3\lambda^2 \vec{i} = 3\lambda^2 \vec{i} + 4\lambda^2 \vec{j} \Rightarrow \left| \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} \right| = \sqrt{(3\lambda^2)^2 + (4\lambda^2)^2}$$

$$\left| \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} \right| = 2 \Rightarrow \sqrt{(3\lambda^2)^2 + (4\lambda^2)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = 2 \Rightarrow 5\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Hay dos soluciones :

$$P_1 \begin{cases} x = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ y = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ z = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{cases} \quad y \quad P_1 \begin{cases} x = 4 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5} \right) = -4 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ y = 3 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5} \right) = -3 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ z = -\dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

2.B.- Determinar la posición relativas de las rectas $r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1}$ y

$$s : \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Dos rectas pueden ser paralelas o ser la misma recta, en ese caso sus vectores directores serán proporcionales; cortarse en un punto (ser secantes) y si ninguno de esos casos se da se cruzarán

$$r : \begin{cases} x = -4 - 3\lambda \\ y = 7 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(-4 , 7 , 0) \\ \vec{v_r} = (-3 , 4 , 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} -2x - 4y + 10z + 10 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 12z + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$3y = 12z + 6 \Rightarrow y = 4z + 2 \Rightarrow x + 2 \cdot (4z + 2) - 5z - 5 = 0 \Rightarrow x + 3z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - 3z$$

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3\mu \\ y = 2 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(1 , 2 , 0) \\ \vec{v_s} = (-3 , 4 , 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = \vec{v_s} \Rightarrow Son\ paralelas\ o\ coincidentes$$

Veamos si tienen algun punto común

$$\begin{cases} -4 - 3\lambda = 1 - 3\mu \\ 7 + 4\lambda = 2 + 4\mu \\ \lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu \Rightarrow -4 - 3\lambda = 1 - 3\lambda \Rightarrow -4 \neq 1 \Rightarrow Incompatible$$

No son la misma recta $\Rightarrow$ *SON PARALELAS*

3.B.- Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar el rango de **M** según valores del parámetro **a**

b) Determinar para que valores de **a** existe la matriz inversa de **M**. Calcular dicha matriz inversa para **a = 2**

$a)$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 2a^3 + 2a + 2a + 2a = -2a^3 + 2a = 2a\left(1 - a^2\right) \Rightarrow Si\ 2a\left(1 - a^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$Si\ |M| = 0 \Rightarrow 2a\left(1 - a^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-1\,,\,0\,,\,1\} \Rightarrow rango(M) = 3 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

$Cuando\ a = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Cuando\ a = -1 \Rightarrow rango(M) = 2$$

$Cuando\ a = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv\Rightarrow Cuando\ a = 0 \Rightarrow rango(M) = 2$$

$Cuando\ a = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv\Rightarrow Cuando\ a = 1 \Rightarrow rango(M) = 2$$

Continuación del problema 3B.-

$b)$

$$\forall a \in \Re - \{-1\,,\,0\,,1\} \Rightarrow rango(M) = 3 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

$$Si\ a = 2 \Rightarrow |M| = 2a\left(1-a^2\right) = 2.2.\left(1-2^2\right) = 4.(-3) = -12 \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|}\cdot adj\left(M^t\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\left(M^t\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$adj\left(M^t\right) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.B.- a) Estudiar y representar gráficamente la función: $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

b) Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y=1$ y $x=\dfrac{5}{2}$

a)

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(f)=\forall x\in\Re-\{2\}$$

Puntos de corte con los ejes

$$Con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow 1\neq 0 \Rightarrow \nexists$$

$$Con\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{(0-2)^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \left(0\,,\frac{1}{4}\right)$$

Simetria

$$f(-x)=\frac{1}{(-x-2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}\neq f(x) \Rightarrow No\ es\ simétrica\ respecto\ a\ OY\ ni\ al\ origen\ de\ coordenadas$$

Asíntotas

$$Verticales \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(2^- -2)^2}=\dfrac{1}{(0^-)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(2^+ -2)^2}=\dfrac{1}{(0^+)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty \end{cases}$$

Horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \exists\ y=0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(-x-2)^2}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \exists\ y=0 \Rightarrow x\to-\infty$$

Oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x-2)^2}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \nexists$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(-x)(-x-2)^2}=\frac{1}{-\infty}=0 \Rightarrow \nexists$$

Crecimiento

$$f'(x)=\frac{-2(x-2)}{(x-2)^4}=-\frac{2}{(x-2)^3} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} -2<0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x-2)^3>0 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re / x>2 \end{cases}$$

Continúa el problema 4.B.-

a) Contnuación

$-\infty$ **(-)** ∞

-2 <0

$-\infty$ **(-)** **2** **(+)** ∞

x > 2

(+) **(-)**

f(x) > 0 **f(x) < 0**

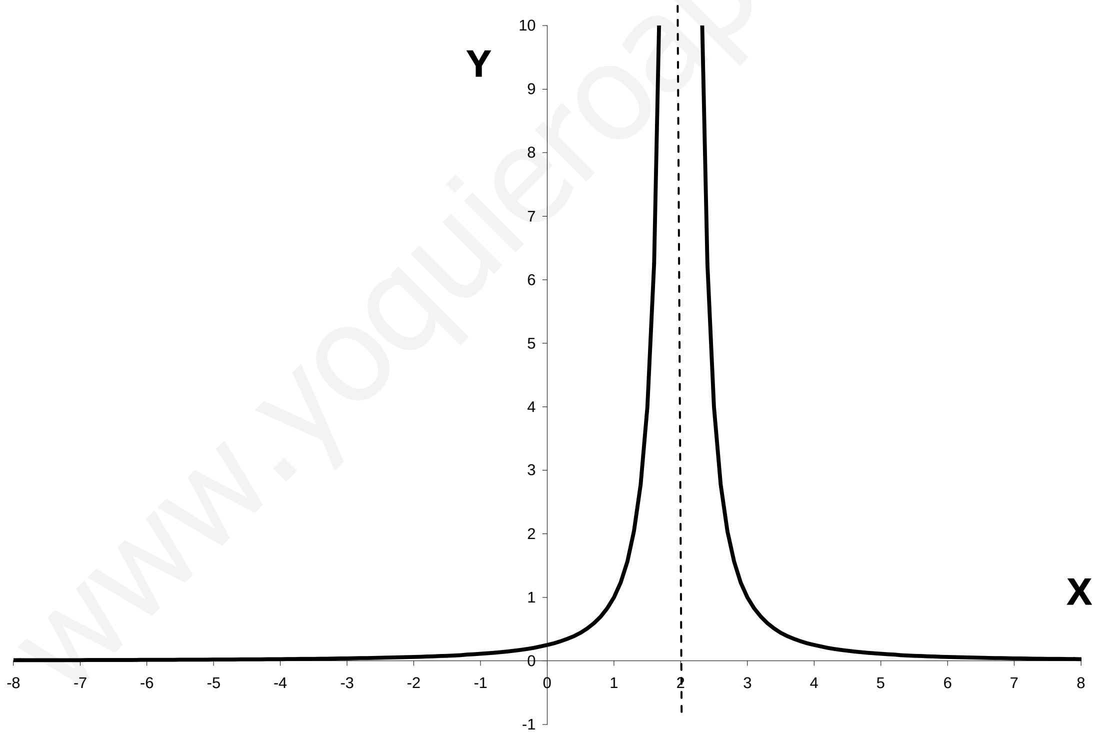
Crecimiento $\forall x \in \Re / x < 2$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / x > 2$

No hay máximos ni mínimos porque correspondería en el punto x = 2 en donde hay una asíntota vertical

Concavidad y convexidad

$$f''(x) = -2\frac{-3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{6}{(x-2)^4} \Longrightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ (x-2)^4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases} \Rightarrow \textit{Cóncavo } \forall x \in \Re$$

No hay puntos de inf *lexión*



Continúa el problema 4.B.-

$b)$

$$y=1\Rightarrow 1=\frac{1}{(x-2)^2}\Rightarrow (x-2)^2=1\Rightarrow x^2-4x+4=1\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow \Delta=16-12=4>0\Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4+2}{2}=3\\ x=\frac{4-2}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow Como\ x>2\Rightarrow x=3$$

$$A=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx-\int_{\frac{5}{2}}^{1}1.dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}\,dt-[x]_{\frac{5}{2}}^{3}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{-2}\,dt=\frac{1}{-1}\cdot\left[t^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}-\left(3-\frac{5}{2}\right)=-\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{1}{2}$$

$$x-2=t\Rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow t=1\\ x=\frac{5}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow dx=dt$$

$$A=-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}=-(1-2)-\frac{1}{2}=-(-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,u^2$$