

## SEPTIEMBRE 2007-08

## OPCIÓN A

1.A.- Dada la función:  $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$ , se pide:

a) Dibujar la gráfica de **f**, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas

b) Calcular:  $\int_0^1 f(x) dx$

a)

*Puntos de corte*

$$\text{Con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0 \Rightarrow \forall x \notin \mathbb{R} \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Con OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow e^{-0}(0^2 + 1) = 1$$

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 1) + 2xe^{-x} = -e^{-x}(x^2 + 1 - 2x) = -e^{-x}(x - 1)^2$$

*Crecimiento y decrecimiento*

$$\text{Crece} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow (-1)e^{-x}(x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \\ e^{-x} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{Decreciente } \forall x \in \mathbb{R}$$

*No hay máximos ni mínimos relativos*

*Puntos de inflexión*

$$f''(x) = -[e^{-x}(x - 1)^2 + 2(x - 1)e^{-x}] = [e^{-x}(x - 1)^2 - 2(x - 1)e^{-x}] = e^{-x}(x^2 - 2x + 1 - 2x + 2)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de inflexión} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow f(3) = e^{-3}(3^2 + 1) = \frac{10}{e^3} \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \Rightarrow f(1) = e^{-1}(1^2 + 1) = \frac{2}{e} \end{cases}$$

*Asíntotas verticales*

*No tiene*

*Asíntotas horizontales*

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Cuando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y = 0$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x [(-x)^2 + 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 + 1) = \infty \cdot \infty = \infty \Rightarrow \text{Cuando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \text{No existe}$$

*asíntota vertical*

**Continuación del problema 1.A.-**a) *Continuación**Asíntotas oblicuas*

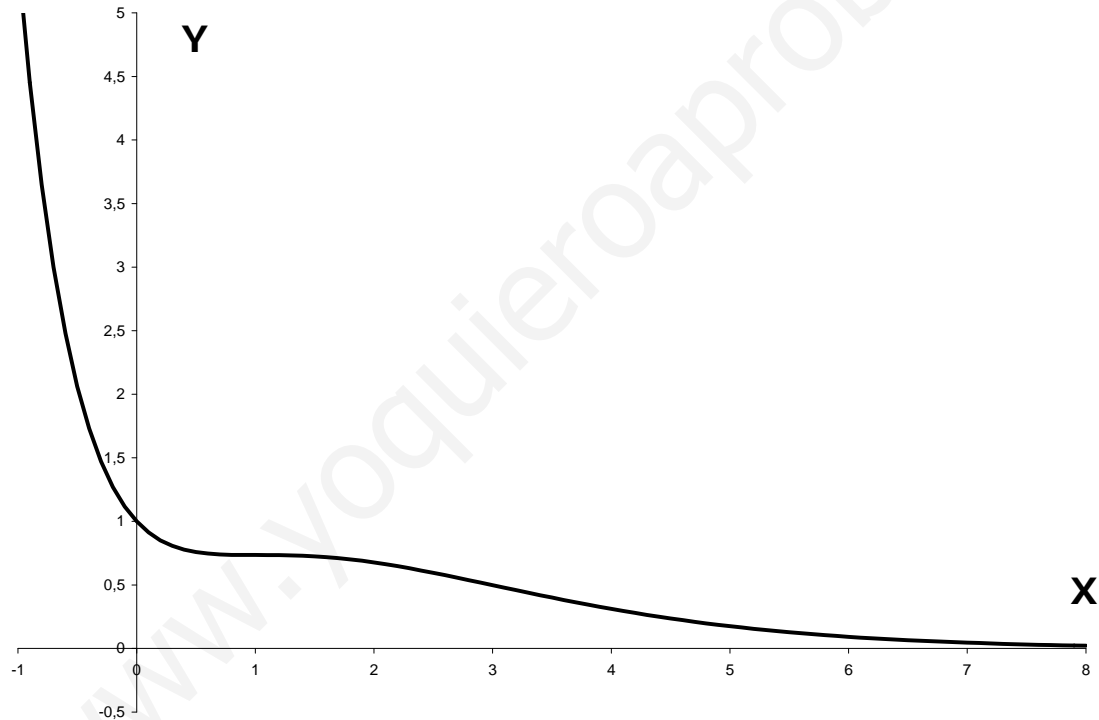
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{xe^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x + e^x x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x(1+x)} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x(1+x) + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x(2+x)} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Cuando } x \rightarrow \infty \Rightarrow \text{No existe}$$

*asíntota oblicua*

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x[(-x)^2 + 1]}{-x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x(x^2 + 1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x 2x + e^x(x^2 + 1)}{1} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x(x^2 + 2x + 1)}{1} = -\frac{\infty}{1} = -\infty \Rightarrow \text{Cuando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \text{No existe}$$

*asíntota oblicua***Gráfica de la función**

b)

$$I = \int e^{-x}(x^2 + 1) dx = -e^{-x} \cdot (x^2 + 1) - \int -e^{-x} \cdot 2x dx = -e^{-x} \cdot (x^2 + 1) + 2 \int e^{-x} x dx$$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = u \Rightarrow 2x dx = du \\ e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -\int e^t dt = -e^t = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = -e^{-x} \cdot (x^2 + 1) + 2 \int e^{-x} x dx = -e^{-x} \cdot (x^2 + 1) + 2(-xe^{-x}) - 2 \int -e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1) - 2e^{-x}$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -\int e^t dt = -e^t = -e^{-x} \end{cases} \quad I = -e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 3) + K$$

**Continuación del problema 1.A.-***b) Continuación*

$$\int_0^1 e^{-x}(x^2 + 1) dx = -[e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 3)]_0^1 = -[e^{-1} \cdot (1^2 + 2 \cdot 1 + 3) - e^{-0} \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 3)] = -(6e^{-1} - 3)$$

$$\int_0^1 e^{-x}(x^2 + 1) dx = -6e^{-1} + 3 = -\frac{6}{e} + 3 = \frac{3e - 6}{e}$$

www.yoquieroaprobar.es

2.A.- Dada la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha + 1 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) Determinar el rango de **A** según los valores del parámetro **a**  
 b) Decir cuando la matriz **A** es invertible. Calcular la inversa para **a = 1**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \alpha + 1 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 2(\alpha + 1) - 2\alpha(\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)[1 - \alpha(\alpha + 1)] = 2(\alpha + 1)(-\alpha^2 - \alpha + 1)$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -2(\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \\ \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, -1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ -(1 + \sqrt{5}) & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) (1 + \sqrt{5}) = \frac{1 - 5}{2} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\text{Si } \alpha = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ -1 + \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) (-1 + \sqrt{5}) = \frac{5 - 1}{2} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b)

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A^t) \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow |A| = -2(1+1)(1^2 + 1 - 1) = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**3.A** Dado los puntos  $\mathbf{P}(1, 1, 3)$ ,  $\mathbf{Q}(0, 1, 0)$ , se pide

a) Hallar todos los puntos  $\mathbf{R}$  tales que la distancia entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$  sea igual a la distancia entre  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ . Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar todos los puntos  $\mathbf{S}$  contenidos en la recta que pasa por  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  que verifican  $\text{dist}(\mathbf{P}, \mathbf{S}) = 2 \cdot \text{dist}(\mathbf{Q}, \mathbf{S})$ , donde "dist" significa distancia

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (x, y, z) - (1, 1, 3) = (x-1, y-1, z-3) \\ \overrightarrow{QR} = (x, y, z) - (0, 1, 0) = (x, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} &= \pm \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 \Rightarrow -2x + 1 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow \\ 2x + 6z + 10 &= 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3z + 5 = 0 \Rightarrow \text{Es un plano} \end{aligned}$$

b)

$$\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0) - (1, 1, 3) = (-1, 0, -3) \equiv (1, 0, 3) \Rightarrow s \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PS} = (\lambda, 1, 3\lambda) - (1, 1, 3) = (\lambda-1, 0, 3\lambda-3) \\ \overrightarrow{QS} = (\lambda, 1, 3\lambda) - (0, 1, 0) = (\lambda, 0, 3\lambda) \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \Rightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2} = \pm 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2}$$

$$(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2 = 4(\lambda^2 + 9\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 40\lambda^2 \Rightarrow -30\lambda^2 - 20\lambda + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \lambda_2 = \frac{-2-4}{6} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow S_1 \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow S_1 \left( \frac{1}{3}, 1, 1 \right)$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow S_2 \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 3 \cdot (-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow S_2(-1, 1, -3)$$

**4.A.-** Dado las rectas :  $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$  ,  $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$

Halla la ecuación de la recta **t** perpendicular común a ambas

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{array} \Rightarrow \vec{v}_t = [-1 + \lambda - 2\mu, 2 + 2\lambda - (1 + 3\mu), 3\lambda - 4\mu] = (\lambda - 2\mu - 1, 2\lambda - 3\mu + 1, 3\lambda - 4\mu)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 2, 3) \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_t \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_t = 0 \Rightarrow (1, 2, 3) \cdot (\lambda - 2\mu - 1, 2\lambda - 3\mu + 1, 3\lambda - 4\mu) = 0 \Rightarrow \\ \vec{v}_s = (2, 3, 4) \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_t \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_t = 0 \Rightarrow (2, 3, 4) \cdot (\lambda - 2\mu - 1, 2\lambda - 3\mu + 1, 3\lambda - 4\mu) = 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu - 1 + 2 \cdot (2\lambda - 3\mu + 1) + 3 \cdot (3\lambda - 4\mu) = 0 \\ 2 \cdot (\lambda - 2\mu - 1) + 3 \cdot (2\lambda - 3\mu + 1) + 4 \cdot (3\lambda - 4\mu) = 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu - 1 + 4\lambda - 6\mu + 2 + 9\lambda - 12\mu = 0 \\ 2\lambda - 4\mu - 2 + 6\lambda - 9\mu + 3 + 12\lambda - 16\mu = 0 \end{array} \Rightarrow \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 14\lambda - 20\mu + 1 = 0 \\ 20\lambda - 29\mu + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 140\lambda - 200\mu + 10 = 0 \\ -140\lambda + 203\mu - 7 = 0 \end{array} \Rightarrow 3\mu + 3 = 0 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow 14\lambda - 20(-1) + 1 = 0 \Rightarrow \right.$$

$$14\lambda = -21 \Rightarrow \lambda = -\frac{21}{14} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{v}_t = \left[ -1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1, 2(-1) - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1, 3(-1) - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \right]$$

$$\vec{v}_t = \left( -1 + 3 - 1, -2 + \frac{9}{2} + 1, -3 + 6 \right) = \left( 1, \frac{7}{2}, 3 \right) \equiv (2, 7, 6) \Rightarrow S \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y = 1 + 3 \cdot (-1) = -2 \\ z = 4 \cdot (-1) = -4 \end{cases}$$

$$t \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = -2 + 7\alpha \\ z = -4 + 6\alpha \end{cases}$$

## OPCIÓN B

1.B a) Calcular  $\int x^3 \ln(x) dx$  donde  $\ln(x)$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

b) Utilizar el cambio de variable  $x = e^t - e^{-t}$  para calcular  $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

**Indicación:** Para deshacer el cambio de variable utilizar:  $t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$

a)

$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot \int x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 + K$$

$$\text{Por partes} \begin{cases} \ln(x) = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ x^3 dx = dv \Rightarrow v = \int x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \end{cases}$$

$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \left[ \ln(x) - \frac{1}{4} \right] + K$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}} dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = \int dt = t = \xrightarrow{\text{Por indicación del problema}} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) + K$$

$$\begin{cases} x = e^t - e^{-t} \Rightarrow dx = [e^t - (-1)e^{-t}] dt = (e^t + e^{-t}) dt \\ 4 + x^2 = 4 + (e^t - e^{-t})^2 = 4 + e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t} = 4 + e^{2t} - 2e^0 + e^{-2t} = e^{2t} + 2 + e^{-2t} = (e^t + e^{-t})^2 \end{cases}$$

Veamos como se despeja  $t$  (aunque no haga falta)

$$x = e^t - \frac{1}{e^t} \Rightarrow x e^t = e^{2t} - 1 \Rightarrow e^{2t} - x e^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = u \Rightarrow u^2 - x u - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = x^2 + 4 \Rightarrow$$

$$u = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \Rightarrow t \cdot \ln(e) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) \Rightarrow t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) \\ e^t = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \Rightarrow t \cdot \ln(e) = \ln\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) \Rightarrow t = \ln\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) \end{cases}$$

2.B.- Dado el plano  $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$  y la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$ , se pide:

a) Hallar el punto **P** determinado por la intersección de **r** con  $\pi_1$ .

b) Hallar un plano  $\pi_2$  paralelo a  $\pi_1$  y tal que el segmento de la recta **r** comprendido entre los planos  $\pi_1, \pi_2$  tenga una longitud de  $\sqrt{29}$  unidades

a)

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Intersección con } \pi_1 \Rightarrow 1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$P \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\ y = -1 + 3 \cdot 1 = 2 \\ z = -4 \cdot 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow P(3, 2, -4)$$

b) Al ser paralelos tendrán el mismo vector director y el que nos piden tendrá un punto Q, intersección con la recta **r** que distará de P el valor dado, o sea el módulo del vector PQ es  $\sqrt{29}$

a)

$$\text{Ecuación de } \pi_2 \Rightarrow x + y + z + D = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Intersección con } \pi_2 \Rightarrow 1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda + D = 0 \Rightarrow \lambda + D = 0 \Rightarrow \lambda = -D$$

$$Q \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot D \\ y = -1 + 3 \cdot D \\ z = -4 \cdot D \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1 + 2D, -1 + 3D, -4D) - (3, 2, -4) = (-2 + 2D, -3 + 3D, -4D + 4) \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-2 + 2D)^2 + (-3 + 3D)^2 + (-4 + 4D)^2} = \pm\sqrt{29} \Rightarrow (-2 + 2D)^2 + (-3 + 3D)^2 + (-4 + 4D)^2 = 29$$

$$4 - 8D + 4D^2 + 9 - 18D + 9D^2 + 16 - 32D + 16D^2 = 29 \Rightarrow 29D^2 - 58D + 29 = 29 \Rightarrow$$

$$29D^2 - 58D = 0 \Rightarrow D^2 - 2D = 0 \Rightarrow D(D - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D - 2 = 0 \Rightarrow D = 2 \end{cases}$$

$$\text{Dos planos cumplen la condición} \begin{cases} \pi_{2a} \equiv x + y + z = 0 \Rightarrow Q_a \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ y = -1 + 3 \cdot 0 = -1 \\ z = -4 \cdot 0 = 0 \end{cases} \\ \pi_{2b} \equiv x + y + z + 2 = 0 \Rightarrow Q_b \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ y = -1 + 3 \cdot 2 = 5 \\ z = -4 \cdot 2 = -8 \end{cases} \end{cases}$$



3.B.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3v = -4 \\ x + 2y + z - 3v = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6v = -8 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$$6v = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x - 2 \cdot 2 + z - 0 = -4 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z \Rightarrow$$

$$\text{Solución}(-\lambda, 2, \lambda, 0)$$

**4.B.-** El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor disponible, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Llamando **C** al número de Billetes de 50 euros, **V** a los de 20 euros y **D** a los de 10 euros

$$\begin{cases} C + V + D = 225 \\ 50C + 20V + 10D = 7000 \\ C + D = 2V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + V + D = 225 \\ 5C + 2V + D = 700 \\ C - 2V + D = 0 \end{cases}$$

*Por Gauss*

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 5 & 2 & 1 & 700 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 3 & 4 & 425 \\ 0 & 0 & 4 & 200 \end{array} \right) \Rightarrow 4D = 200 \Rightarrow D = \frac{200}{4} = 50 \text{ billetes de } 10 \text{ €}$$

$$3V + 4 \cdot 50 = 425 \Rightarrow 3V = 425 - 200 \Rightarrow 3V = 225 \Rightarrow V = \frac{225}{3} = 75 \text{ billetes de } 20 \text{ €} \Rightarrow$$

$$C + 75 + 50 = 225 \Rightarrow C = 225 - 125 = 100 \text{ billetes de } 50 \text{ €}$$

*Solución*(100 , 75 , 50)