

JUNIO 2007- 08**OPCIÓN A**

1.A.- Dado el sistema de ecuaciones lineales : $\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$, se pide

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro **a**. Resolverlo cuando la solución sea única

b) Determinar para que valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que **y = 2**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Solución en función de a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-2 + a(a+1)}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a+1-2a}{a^2 - 1} = \frac{1-a}{(a-1)(a+1)} = -\frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$$

Cuando $a = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Cuando $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow \text{Solución}(\lambda + 2, \lambda)$

b)

Cuando $a = 1 \Rightarrow y = \lambda = 2 \Rightarrow \text{Solución}(2 + 2, 2) \Rightarrow \text{Solución}(4, 2)$

$$2 = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow 2a + 2 = -1 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) - 2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 2}{\frac{9}{4} - 1} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$$

2.A.- Dada las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$, se pide

a) Discutir la posición relativa de las dos rectas r , s según los valores del parámetro a

b) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r , s

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - a\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow r \parallel s \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-a}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow a = -1 \\ \frac{1}{-1} = \frac{-a}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{No pueden ser paralelas}$$

Se cortaran

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + a\lambda = 1 + \mu \\ \lambda = 3 - \mu \\ 1 - a\lambda = \mu \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} a\lambda - \mu = -1 \\ \lambda + \mu = 3 \\ a\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\lambda - \mu = -1 \\ a\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\mu = 2 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow -2a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Punto de corte} \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 + 0 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 - 0 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow P(2, 0, 1)$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_{rs} = (2 + \lambda - 1 - \mu, \lambda - 3 + \mu, 1 - \lambda - \mu)$$

$$\vec{v}_{rs} = (\lambda - \mu + 1, \lambda + \mu - 3, -\lambda - \mu + 1) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{rs} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_{rs} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{v}_{rs} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_{rs} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - \mu + 1, \lambda + \mu - 3, -\lambda - \mu + 1) \cdot (2, 0, 1) = 0 \\ (\lambda - \mu + 1, \lambda + \mu - 3, -\lambda - \mu + 1) \cdot (1, -1, 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\lambda - 2\mu + 2 - \lambda - \mu + 1 = 0 \\ \lambda - \mu + 1 - \lambda - \mu + 3 - \lambda - \mu + 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 3\mu + 3 = 0 \\ -\lambda - 3\mu + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow -6\mu + 8 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\lambda - 3 \cdot \frac{4}{3} + 3 = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Continuación Problema 2.A.-b) *Continuación*

$$\left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A(3, 1, 0) \\ B \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow B\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{array} \right. \Rightarrow d_{rs} = d_{AB} = \sqrt{\left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4+16}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} u$$

3.A Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - x^2)(e^x + x^2)}{e^x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - x^4}{e^x + x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x} - 4x^3}{e^x + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x} - 12x^2}{e^x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8e^{2x} - 24x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16e^{2x} - 24}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 32e^x = \infty \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{6}{6}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1^x} = \left(\text{Sabido que cuando } x \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x \rightarrow 0 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^x \rightarrow 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow 0 \\ 1^x \rightarrow 1 \end{array} \right. \right) = \\ &= \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

4.A.- Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$f(x) = x[\ln(x)]^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = [\ln(x)]^2 + 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x = [\ln(x) + 2]\ln(x) \\ f''(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot [\ln(x) + 2] = \frac{1}{x} \cdot [\ln(x) + \ln(x) + 2] = \frac{2}{x} \cdot [\ln(x) + 1] \end{array} \right. \Rightarrow$$

Máximos o mínimos relativos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow [\ln(x) + 2]\ln(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow f(1) = 1[\ln(1)]^2 = 0 \\ \ln(x) + 2 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \Rightarrow f(e^{-2}) = e^{-2}[\ln(e^{-2})]^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(1) = \frac{2}{1} \cdot [\ln(1) + 1] = 2 \cdot (0 + 1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (1, 0) \\ f''(e^{-2}) = \frac{2}{e^{-2}} \cdot [\ln(e^{-2}) + 1] = 2e^2 \cdot [-2\ln(e) + 1] = 2e^2 \cdot [-2 \cdot 1 + 1] = -2e^2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow f(e^{-2}) = \frac{1}{e^2} \cdot [\ln(e^{-2})]^2 = \frac{1}{e^2} \cdot [(-2)\ln(e)]^2 = \frac{1}{e^2} \cdot (-2)^2 = \frac{4}{e^2} \Rightarrow$$

$$\text{Máximo relativo} \left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e} \right)$$

Puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \cdot [\ln(x) + 1] = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow f(e^{-1}) = e^{-1}[\ln(e^{-1})]^2$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1} (-1 \cdot \ln e)^2 = \frac{1}{e} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{e} \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)$$

OPCIÓN B

1.B.- Dada la siguiente matriz de orden n : $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2

b) Calcular el determinante de la matriz A_3

c) Calcular el determinante de la matriz A_5

a)

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10$$

b)

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 100 = 10^2$$

c)

Previsiblemente será 10^4

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10000 = 10^4$$

$$|A_n| = 10^{n-1}$$

2.B.- a) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = cx^4 + \frac{1}{c} \cdot x^2 + 1$ el eje **OX** y las rectas $x = 0$ y $x = 1$

b) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

a)

$$A = \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c} \cdot x^2 + 1 \right) dx = \frac{1}{5} \cdot c \cdot [x^5]_0^1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + [x]_0^1$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot c \cdot (1^5 - 0^5) + \frac{1}{3c} \cdot (1^3 - 0^3) + (1 - 0) = \frac{1}{5} \cdot c + \frac{1}{3c} + 1$$

b)

$$A' = \frac{dA}{dc} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow 3c^2 - 5 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 5 \Rightarrow c^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$c = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow \text{Como } c > 0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

3.B.- Dado los puntos **A(0, 0, 1)**, **B(1, 0, -1)**, **C(0, 1, -2)** y **D(1, 2, 0)**, se pide:

- Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios
- Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos **A**, **B** y **C**
- Hallar la distancia del punto **D** al plano π

a) Si fuesen coplanarios (estar en el mismo plano) el determinante formado por los vectores **AB**, **AC** y **AD** tendrá valor nulo, en caso contrario no lo son

$$\begin{cases} \overline{AB} = (1, 0, -1) - (0, 0, 1) = (1, 0, -2) \\ \overline{AC} = (0, 1, -2) - (0, 0, 1) = (0, 1, -3) \\ \overline{AD} = (1, 2, 0) - (0, 0, 1) = (1, 2, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 6 = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{No son coplanarios}$$

b)

$$\begin{cases} \overline{AB} = (1, 0, -2) \\ \overline{AC} = (0, 1, -3) \\ \overline{AG} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (z-1) + 2x + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 1 = 0$$

c)

$$d_{D\pi} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 6 + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{14} = \frac{4\sqrt{14}}{7} u$$

4.B.- Dado el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano p que pasa por el punto P

b) Hallar el punto Q intersección de p y r

c) Hallar el punto R intersección de p con el eje OY

d) Hallar el área del triángulo PQR

a) La recta pedida r esta determinada por el punto P y como vector director el del plano p ya que al ser perpendicular a él es paralelo a ella.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

b)

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \Rightarrow 3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda - 3 + \lambda + 10 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$Q \begin{cases} x = 1 + 3(-1) = -2 \\ y = 2 + 2(-1) = 0 \\ z = 3 - (-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0, 4)$$

c)

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 + 0\mu = 0 \\ y = 0 + \mu = \mu \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot \mu - 0 + 10 = 0 \Rightarrow 2 \cdot \mu + 10 = 0 \Rightarrow \mu = -5 \\ z = 0 + 0\mu = 0 \end{cases}$$

$$R \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \Rightarrow R(0, -5, 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

d)

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-2, 0, 4) - (1, 2, 3) = (-3, -2, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, -5, 0) - (1, 2, 3) = (-1, -7, -3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 6\vec{i} - \vec{j} + 21\vec{k} - 2\vec{k} + 7\vec{i} - 9\vec{j} = 13\vec{i} + 6\vec{j} + 19\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{13^2 + 6^2 + 19^2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{566} u^2$$