Opción A

Ejercicio 1.- Dada la matriz: $M=\begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1,25 puntos)Determinar los valores del parámetro ***m*** para los cuales la matriz ***M*** es invertible
b) (0,5 puntos)Determinar los valores del parámetro ***m*** para los cuales la matriz M^{25} es invertible
c) (1,25 puntos)Para ***m = -1*** calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de la matriz ***M***

Solución

a) El símbolo ∃ significa "existe al menos un o una"

$$\exists M^{-1} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m+2m^2-2m-m=2.\left(m^2-m\right)=2.m.(m-1)$$

$$\text{Si } |M|=0 \Rightarrow 2.m.(m-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall m \in R-\{0\,,1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

b)

$$\left|M^{25}\right|=|M|^{25}=\left[2.m.(m-1)\right]^{25}=2^{25}.m^{25}.(m-1)^{25} \Rightarrow$$

$$\text{Si } \left|M^{25}\right|=0 \Rightarrow 2^{25}.m^{25}.(m-1)^{25}=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

$$\forall m \in R-\{0\,,1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \exists\left(M^{25}\right)^{-1}$$

c)

$$\text{Cuando } m=-1 \Rightarrow |M|=2.(-1).\left[(-1)-1\right]=2.(-1).(-2)=4 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}.adj\left(M^t\right) \Rightarrow M^t=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\left(M^t\right)=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M^{-1}=\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & \text{si} \quad 1+ax>0 \quad y \quad x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros ***a***, ***b*** para los cuales la función ***f(x)*** es continua en ***x = 0***
b) (1,5 puntos) Para ***a = b = 1,*** estudiar si la función ***f*** es derivable en ***x = 0*** aplicando la definición de derivada

Solución

a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)-bx}{x^2}=\frac{\ln(1+a.0)-b.0}{0^2}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-b.(1+ax)}{2x(1+ax)}=$$

$$=\frac{a-b.(1+a.0)}{2.0.(1+a.0)}=\frac{a-b}{0}=\xrightarrow{a-b=0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{-b.a}{2.(1+ax)+2ax}=$$

$$=-\frac{b.a}{2.(1+a.0)+2a.0}=-\frac{b.a}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\\a.b=1\end{cases}\Rightarrow a=b\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\Rightarrow b=-1\\a=1\Rightarrow b=1\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{1^2}=\ln(1+x)-x\Rightarrow f(x+h)=\ln(1+x+h)-(x+h)=\ln(1+x+h)-x-h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+x+h)-x-h-[\ln(1+x)-x]}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+x+h)-x-h-\ln(1+x)+x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+x+h)-h-\ln(1+x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)-h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(\frac{1+x+h}{1+x}\right)-h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1+x}+\frac{h}{1+x}\right)-h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{1+x}\right)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{1+x}\right)-1=\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{1+x}\right)^{\frac{1}{h}}-1=$$

$$\text{Como }\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{1+x}\right)^{\frac{1}{h}}=1^\infty\Rightarrow\lim_{h\to0}\ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1+x}{h}}\right)^{\frac{1+x}{h}}\right]^{\frac{1}{1+x}}-1=\ln e^{\frac{1}{1+z}}-1=\left(\frac{1}{1+x}\right).\ln e-1=\frac{1}{1+x}-1$$

$$f'(x)=\frac{1-1-x}{1+x}=-\frac{x}{1+x}\Rightarrow f'(0)=-\frac{0}{1+0}=0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos.

Dada las rectas: $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{a}$, $s\equiv\frac{x-3}{b}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1}$ determinar los valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para los cuales las rectas ***r***, ***s*** se cortan perpendicularmente.

Solución

Como se cortan tienen un punto común y al ser perpendiculares el producto escalar de los vectores directores de las rectas es nulo

$$r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{a}\quad,\quad s\equiv\frac{x-3}{b}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

$$\left\{\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\Rightarrow\vec{v_r}=(1,2,a)\\z=a\lambda\end{cases}\\ s\equiv\begin{cases}x=3+\mu b\\y=\mu\Rightarrow\vec{v_s}=(b,1,-1)\\z=3-\mu\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}\vec{v_r}\perp\vec{v_s}\Rightarrow\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}=0\Rightarrow(1,2,a)\cdot(b,1,-1)=0\\\lambda=3+\mu b\\2\lambda=\mu\\a\lambda=3-\mu\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+2-a=0\\\lambda=3+\mu b\\\lambda=\frac{\mu}{2}\\a\lambda=3-\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+2-a=0\\3+\mu b=\frac{\mu}{2}\\a\times\frac{\mu}{2}=3-\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+2-a=0\\6+2\mu b=\mu\Rightarrow\mu-2\mu b=6\Rightarrow\\a\cdot\mu+2\mu=6\end{cases}\begin{cases}b+2-a=0\\\begin{cases}\mu(1-2b)=6\\(a+2)\mu=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=\frac{6}{1-2b}\\\mu=\frac{6}{a+2}\end{cases}\Rightarrow\end{cases}$$

$$\begin{cases}b-a=-2\\1-2b=a+2\Rightarrow a+2b=-1\end{cases}\Rightarrow 3b=-3\Rightarrow b=-1\Rightarrow -1-a=-2\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$$

Solución $(1,-1)$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el plano $\pi\equiv2x-y+2z+1=0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π

Solución

Calcularemos una recta ***r***, que pasando por un punto de él, sea perpendicular. Hallaremos los puntos ***A*** y ***B***, de la recta, que distan tres unidades del que hemos tomado como referencia, después haremos pasar los plano por ellos

$\pi \equiv 2x-y+2z+1=0 \Rightarrow P(0,-1,-1) \Rightarrow 2.0-(-1)+2.(-1)+1=0$

$$r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(0-2\lambda)^2+(-1+1+\lambda)^2+(-1+1+2\lambda)^2}=\pm 3 \Rightarrow 4\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2=9 \Rightarrow 9\lambda^2=9 \Rightarrow$$

$$\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\begin{cases} x=2.1=2 \\ y=-1-1=-2 \\ z=-1+2.1=1 \end{cases} \Rightarrow A(2,-2,1) \\ B\begin{cases} x=2.(-1)=-2 \\ y=-1-(-1)=0 \\ z=-1+2.(-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow B(-2,0,-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Pasando por } A \Rightarrow 2.2-(-2)+2.1+C=0 \Rightarrow 4+2+2+C=0 \Rightarrow C=-8 \Rightarrow \pi_A \equiv 2x-y+2z-8=0 \\ \text{Pasando por } B \Rightarrow 2.(-2)-0+2.(-3)+D=0 \Rightarrow -4+0-6+D=0 \Rightarrow D=10 \Rightarrow \pi_B \equiv 2x-y+2z+10=0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1.-

a) (1 punto). Dada la función: $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, hallar el punto o los puntos de la gráfica de ***f(x)*** en los que la pendiente de la recta tangente sea ***1***.
b) (0'5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de ***f(x)*** en el punto ***x = 0***
c) (1'5 puntos). Sea ***g*** una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que ***g(0) = 0***, ***g(2) = 2***. Demostrar que existe al menos un punto ***c*** en el intervalo ***(0 , 2)*** tal que ***g'(c) = 1***.

Solución

a)

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)-2xx}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x)=1 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=1 \Rightarrow 1-x^2=(1+x^2)^2 \Rightarrow$$

$$1-x^2=1+2x^2+x^4 \Rightarrow x^4+3x^2=0 \Rightarrow (x^2+3).x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-3} \end{cases}$$

Cuando $x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{0}{1+0^2}=0$

b)

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=\dfrac{1-0^2}{(1+0^2)^2}=1 \end{cases} \Rightarrow y-0=1.(x-0) \Rightarrow y=x \Rightarrow x-y=0$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la recta: $r \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x+y-2z+1=0$, hallar la ecuación de la recta ***s*** simétrica de la recta ***r*** respecto del plano π .

Solución

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de la recta} \begin{cases} A(1,0,0) \\ B\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow B(2,-1,1) \end{cases}$$

Punto simétrico de A

Recta s que pasa por A perpendicular al plano $\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=0+\mu=\mu \\ y=0-2\mu=-2\mu \end{cases} \Rightarrow$

Punto P de corte de la recta s con el plano $\pi \Rightarrow 1+\mu+\mu-2(-2\mu)+1=0 \Rightarrow 6\mu+2=0 \Rightarrow \mu=-\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$P\begin{cases} x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ y=-2\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}=\frac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 3x_{A'}+3=4 \Rightarrow 3x_{A'}=1 \Rightarrow x_{A'}=\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}=\frac{0+y_{A'}}{2} \Rightarrow 3y_{A'}=-2 \Rightarrow y_{A'}=-\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}=\frac{0+z_{A'}}{2} \Rightarrow 3z_{A'}=4 \Rightarrow z_{A'}=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Punto simétrico de B

Recta t que pasa por A perpendicular al plano $\Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=2+\varepsilon \\ y=-1+\varepsilon \\ y=1-2\varepsilon \end{cases}$

Punto Q de corte de la recta t con el plano $\pi \Rightarrow 2+\varepsilon-1+\varepsilon-2.(1-2\varepsilon)+1=0 \Rightarrow 6\varepsilon=0 \Rightarrow \varepsilon=0$

$$t \equiv \begin{cases} x=2+0=2 \\ y=-1+0=-1 \Rightarrow \text{En este caso } B'(2,-1,1) \text{ al ser punto del plano} \\ y=1-2\times 0=1 \end{cases}$$

LLamando u a la recta pedida

$$\overrightarrow{v_u}=(2,-1,1)-\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \equiv (5,-1,-1) \Rightarrow u \equiv \begin{cases} x=2+5\beta \\ y=-1-\beta \\ y=1-\beta \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} \lambda x+2y+z=0 \\ \lambda x-y+2z=0 \\ x-\lambda y+2z=0 \end{cases}$, se pide:

a)Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de: ***x = y = z = 0***

b)Resolver el sistema para $\lambda=5$

Solución

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix}=-2\lambda+4-\lambda^2+1-4\lambda+2\lambda^2=\lambda^2-6\lambda+5 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A|=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=36-20=16>0 \Rightarrow \lambda=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{6+4}{2}=5 \\ \lambda=\frac{6-4}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow$$

Cuando $\begin{cases} \lambda=5 \\ \lambda=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5 \Rightarrow \text{rang}(A)=2 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

La solución trivial $\Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow \forall\lambda \in R-\{1,5\}$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -25 & 10 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -27 & 9 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -3y+z=0 \Rightarrow z=3y \Rightarrow$$

$5x+2y+3y=0 \Rightarrow 5x+5y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow \text{Solución}(-\lambda,\lambda,3\lambda)$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada las matrices: $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, obtener una matriz cuadrada ***X*** de orden ***2*** que verifique la ecuación matricial ***AXB = A + B***

Solución

$$A^{-1}AXB=A^{-1}\left(A+B\right)\Rightarrow XBB^{-1}=A^{-1}\left(A+B\right)B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\left(A+B\right)B^{-1}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ |A|=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4+2=6\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\,A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ |B|=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=4-6=-2\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\,B^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$X=A^{-1}\left(A+B\right)B^{-1}=\frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 36 & 48 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$