

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de **A** según los valores del parámetro **m**

b) (1 punto). En el caso **m = 0**, resolver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a)

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 1-(m-1) \\ 0 & 1-(m-1) & m-2(m-1) & 1-(m-1)^2 \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & -(m-2) \\ 0 & -(m-2) & -(m-2) & [1+(m-1)][1-(m-1)] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -(m-2) & -(m-2) & -m(m-2) \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & m \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow m-1=0 \Rightarrow m=1
 \end{aligned}$$

Si $m=1 \Rightarrow \text{rang}(A)=2$

Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A)=3$

b)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} x+y+2z-t \\ x-y+t \\ -x+y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow -2y-2z+0=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow x-z+2z-0=0 \Rightarrow x=-z
 \end{aligned}$$

Solución $(-\lambda, \lambda, -\lambda, 0)$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2

a) El vector dirección de la recta buscada t es el formado por los puntos que representan, en la ecuación paramétrica, los valores generales y que es perpendicular a los vectores directores de r_1 y r_2 por ello el producto escalar, con cada uno, es nulo.

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_1} = (1, 0, 0) \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_2} = (0, 1, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_t = (\lambda - 0, 1 - \alpha, 3 - \alpha) = (\lambda, 1 - \alpha, 3 - \alpha) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t \perp \vec{v}_{r_1} \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_{r_1} = 0 \Rightarrow (\lambda, 1 - \alpha, 3 - \alpha) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_{r_2} \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_{r_2} = 0 \Rightarrow (\lambda, 1 - \alpha, 3 - \alpha) \cdot (0, 1, 1) = 0 \Rightarrow 1 - \alpha + 3 - \alpha = 0 \Rightarrow 4 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \\ \vec{v}_t = (0, 1 - 2, 3 - 2) = (0, -1, 1) \end{array} \right. \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

b)

$$R_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(R_1, R_2) = \sqrt{(0-0)^2 + (1-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular los límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arctg} x)^{\frac{a}{x}}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arctg} x)^{\frac{a}{x}} = (1 + 0)^{\frac{a}{0}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} \right)^{\frac{a}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} \right]^{\frac{a}{x} \cdot \operatorname{arctg} x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} \cdot \operatorname{arctg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} \cdot \operatorname{arctg} x = \frac{0}{0} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{1+x^2} = \frac{a}{1+0^2} = a \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arctg} x)^{\frac{a}{x}} = e^a$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2e^x}{7 + 5e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{5e^x} = \frac{2}{5}$$

Ejercicio 4.-Calificación máxima: 2 puntos

Calcular:

a) (1 punto) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

b) (1 punto) $\int_0^\pi x \cos x dx$

a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int \frac{t}{t} dt = - \int dt = -t = -\sqrt{4-x^2} + K$$

$$4 - x^2 = t^2 \Rightarrow -2x dx = 2t dt \Rightarrow x dx = -t dt$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \left[\sqrt{4-x^2} \right]_0^1 = -(\sqrt{4-1^2} - \sqrt{4-0^2}) = -\sqrt{3} + 2$$

b)

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x - \cos x + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\int_0^\pi x \cos x dx = [x \operatorname{sen} x - \cos x]_0^\pi = \pi \operatorname{sen} \pi - \cos \pi - 0 \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = \pi \cdot 0 - (-1) - 0 + 1 = 2$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $\mathbf{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular los valores de \mathbf{a} y \mathbf{b} para que π_1 y π_2 sean paralelos
 b) (1 punto). Para $\mathbf{a} = 1$ y $\mathbf{b} = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2
 c) (1 punto). Para $\mathbf{a} = 4$ y $\mathbf{b} = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2

a) Al ser paralelos, los planos, sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (0, 2, 6) \equiv (0, 1, 3) \\ \vec{v}_2 = (1, 0, b) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (0, 2, 4) = (x, y-2, z-4) \end{array} \right. \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$bx + 3(y-2) - (z-4) = 0 \Rightarrow bx + 3y - z - 6 + 4 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv bx + 3y - z - 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{\pi_1} = (2, -3, 1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (b, 3, -1) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow b = -2$$

Para ser paralelos todo $a \in \mathbb{R}$ y $b = -2$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_2 \equiv 0x + 3y - z - 2 = 0 \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_2 \equiv 3y - z - 2 = 0 \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow z = 3y - 2 \Rightarrow$$

$$r_{\text{intersección}} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{array} \right.$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

c)

Sea el punto $Q(x, y, z)$

$$\begin{cases} \pi_2 \equiv -2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 \equiv 2x - 3y + z + 2 = 0 \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Son planos paralelos}$$

$$\text{Recta que pasa por } (0, 0) \text{ y es perpendicular a los planos } \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte con los planos } \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + 9\alpha + \alpha + 2 = 0 \Rightarrow 14\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{7} \Rightarrow P \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = \frac{3}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \\ 4\alpha + 9\alpha + \alpha - 4 = 0 \Rightarrow 14\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{7} \Rightarrow Q \begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = -\frac{6}{7} \\ z = \frac{2}{7} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Punto medio R} \begin{cases} x = \frac{-\frac{2}{7} + \frac{4}{7}}{2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \\ y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{6}{7}}{2} = -\frac{3}{14} \\ z = \frac{-\frac{1}{7} + \frac{2}{7}}{2} = \frac{1}{14} \end{cases} \Rightarrow \text{Los puntos estaran en el plano } 2x - 3y + z + D = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{7} - 3 \left(-\frac{3}{14} \right) + \frac{1}{14} + D = 0 \Rightarrow \frac{2}{7} + \frac{9}{14} + \frac{1}{14} + D = 0 \Rightarrow \frac{14}{14} + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

Los puntos están en el plano $\pi_3 \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B y C y el origen de coordenadas tenga un volumen mínimo.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 1) - (1, 2, 1) = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{PA} = (a, 0, 0) - (1, 2, 1) = (a-1, -2, -1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 2, 1) = (x-1, y-2, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x-1-2 \cdot (z-1) + (a-1) \cdot (z-1) + y-2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + (a-3) \cdot (z-1) - 3 = 0$$

$$OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \Rightarrow 0 + \lambda + (a-3) \cdot (0-1) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda - a + 3 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda - a = 0 \Rightarrow \lambda = a \Rightarrow B \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=a \\ z=0 \end{cases}$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow 0 + 0 + (a-3) \cdot (\beta-1) - 3 = 0 \Rightarrow a\beta - a - 3\beta + 3 - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)\beta - a = 0 \Rightarrow \beta = \frac{a}{a-3} \Rightarrow \\ z=\beta \end{cases}$$

$$C \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z = \frac{a}{a-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (a, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (0, a, 0) \\ \overrightarrow{OC} = \left(0, 0, \frac{a}{a-3}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{a-3} \end{vmatrix} = \frac{a^3}{a-3}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{OA} \cdot |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{a-3} \Rightarrow V' = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a^2(a-3) - a^3}{(a-3)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a^3 - 9a^2 - a^3}{(a-3)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2a-9)a^2}{(a-3)^2} \Rightarrow$$

$$V' = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 < 3 \Rightarrow \text{No es solución} \\ 2a - 9 = 0 \Rightarrow 2a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{2} > 3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema
 b) (0'5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta
 c) (0'5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta

a)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow$$

$$-5y + 3z = 3 \Rightarrow 3z = 3 + 5y \Rightarrow z = \frac{3 + 5y}{3} \Rightarrow x + 2y - \frac{3 + 5y}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{3 + 5y - 6y}{3} = \frac{3 - y}{3}$$

$$\text{Solución} \left(\frac{3 - \lambda}{3}, \lambda, \frac{3 + 5\lambda}{3} \right)$$

b)

$$\text{Es} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x + 9y - 10z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -10 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow -5z = 5 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow -5y - 3 = 3 \Rightarrow y = -\frac{6}{5}$$

$$x - \frac{12}{5} + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5} \Rightarrow \text{Solución} \left(\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, -1 \right)$$

Sistema Compatible Determinado

b)

$$\text{Es} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x + 9y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -5 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 5 \Rightarrow z = \frac{5}{0} \Rightarrow \text{No hay solución}$$

Sistema Incompatible

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de **A** según los valores del parámetro **a**

b) (1 punto). ¿Para que valores de **a** existe la matriz inversa **A**⁻¹? Calcular **A**⁻¹ para **a = 1**

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = -a(a-1)(a+2) + a^3 = -a(a^2 - a + 2a - 2) + a^3 = -a^3 - a^2 + 2a + a^3 = a(2-a)$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a(2-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2-a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b)

Existe A^{-1} cuando $|A| \neq 0$ por lo tanto para todo $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Rightarrow \text{Si } a = 1 \Rightarrow |A| = 1 \cdot (2-1) = 1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$