OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$ c) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

$a)$

$$det(A^4) = (det\ A)^4 = 3^4 = 81$$

$b)$

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 10$$

$c)$

$$\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la recta: $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$, y el punto **P(2 , 0 , -1)** se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto **P** a la recta ***r***

b) (2 puntos).Hallar las coordenadas del punto **P’** simétrico de **P** respecto de la rectas ***r***

a) Crearemos un plano π que contenga al punto **P** y que sea perpendicular a la recta **r,** su vector director es el de la recta que es perpendicular al vector generador del plano formado por el punto **P** y el genérico **G** . Posteriormente hallaremos el punto **R** de corte del plano π y la recta **r**, siendo la distancia pedida la que hay entre este punto **P** y el **R**

$$Siendo \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (-2\ ,1\ ,3) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (2\ ,0\ ,-1) = (x-2\ ,y\ ,z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{PG} = 0$$

$$(-2\ ,1\ ,3)\cdot(x-2\ ,y\ ,z+1) = 0 \Rightarrow -2\cdot(x-2) + y + 3\cdot(z+1) = 0 \Rightarrow -2x + 4 + y + 3z + 3 = 0$$

$$\pi \equiv 2x - y - 3z - 7 = 0$$

$$Punto\ de\ corte\ R$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ x = -1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\cdot(-1-2\lambda) - (2+\lambda) - 3\cdot(-1+3\lambda) - 7 = 0 \Rightarrow -2+4\lambda-2-\lambda+3-9\lambda-7 = 0$$

$$-6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow -6\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$R\begin{cases} x = -1-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} \\ y = 2+\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ x = -1+3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -5 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}\ ,\frac{2}{3}\ ,-5\right) \Rightarrow d(P,r) = d(PR) = \sqrt{\left(2-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + (-1+5)^2}$$

$$d(P,r) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{1+4}{9} + 16} = \sqrt{\frac{5+144}{9}} = \frac{\sqrt{149}}{3}\ u$$

b) El punto hallado es el punto medio entre **P** y su simétrico **P’**

$$\begin{cases} \frac{5}{3} = \frac{2+x_{P'}}{2} \Rightarrow 6+3x_{P'} = 10 \Rightarrow 3x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{0+y_{P'}}{2} \Rightarrow 3y_{P'} = 4 \Rightarrow y_{P'} = \frac{4}{3} \\ -5 = \frac{-1+z_{P'}}{2} \Rightarrow -1+z_{P'} = -10 \Rightarrow z_{P'} = -9 \Rightarrow z_{P'} = -9 \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{4}{3}\ ,\frac{4}{3}\ ,-9\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas la rectas: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$, $\quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

a) (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular a ***r*** y ***s***

b) (1 punto).Calcular la mínima distancia entre las rectas ***r*** y ***s***

a) Se supone que las rectas se cruzan; toda recta **t** que se apoya en las dos dadas tiene como vector director la diferencia entre los puntos de ambas. Como además es perpendicular a las dos los productos escalares de esta con los vectores directores de las rectas es, en ambos casos, nulo

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (2\lambda - \mu \,, 1 + 3\lambda - \mu \,, -4 - \lambda - 4\mu) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2\lambda - \mu \,, 1 + 3\lambda - \mu \,, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (2 \,, 3 \,, -1) = 0 \\ (2\lambda - \mu \,, 1 + 3\lambda - \mu \,, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (1 \,, 1 \,, 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 2\mu + 3 + 9\lambda - 3\mu + 4 + \lambda + 4\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu + 1 + 3\lambda - \mu - 16 - 4\lambda - 16\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -252\lambda + 18\mu - 126 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow -251\lambda - 141 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{141}{251}$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ -14\lambda + 252\mu + 210 = 0 \end{cases} \Rightarrow 251\mu + 217 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{217}{251}$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[2 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) - \left(-\frac{217}{251} \right), 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) - \left(-\frac{217}{251} \right), -4 - \left(-\frac{141}{251} \right) - 4 \cdot \left(-\frac{217}{251} \right) \right]$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[\left(-\frac{282}{251} \right) + \frac{217}{251} \,, 1 + \left(-\frac{423}{251} \right) + \frac{217}{251} \,, -4 + \frac{141}{251} + \frac{868}{251} \right] \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[-\frac{65}{251} \,, \frac{251 - 423 + 217}{251} \,, \frac{-1004 + 1009}{251} \right] \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \left(-\frac{65}{251} \,, \frac{45}{251} \,, \frac{5}{251} \right) \equiv (-13 \,, 9 \,, 1)$$

$$\begin{cases} R \begin{cases} x = 2 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) = -\frac{282}{251} \\ y = 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) = -\frac{172}{251} \\ z = -4 - \left(-\frac{141}{251} \right) = -\frac{863}{251} \end{cases} \\ S \begin{cases} x = -\frac{217}{251} \\ y = -\frac{217}{251} \\ z = 4 \cdot \left(-\frac{217}{251} \right) = -\frac{868}{251} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -\frac{282}{251} - 13\beta \\ y = -\frac{172}{251} + 9\beta \\ z = -\frac{863}{251} + \beta \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

se pide:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}$

a)

$$Sabiendo\ que\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{8x^3}{x^3}}}{\frac{1}{x}+\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}+\frac{5x}{x^2}-8}}{\frac{1}{x}+2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{\infty}+\frac{5x}{\infty}-8}}{\frac{1}{\infty}+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}=\frac{\sqrt[3]{0+0-8}}{0+2}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{2}=\frac{-2}{2}=-1\quad(1)$$

$$De\ (1)\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right)^{25}=(-1)^{25}=-1$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}=\left(1+4\cdot 0^3\right)^{\frac{2}{0^3}}=1^{\infty}=\left\{\left[\lim_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)\right]^{\frac{1}{4x^3}}\right\}^{4x^3\cdot\frac{2}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^3}{x^3}}=e^8$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la función **f(x) = ln (x^2 + 4x – 5)**, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:
a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de **f(x)** y las asíntotas verticales de su gráfica

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f(x)**

a)

$$x^2 + 4x - 5 > 0 \Rightarrow Si \quad x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-4+6}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-4-6}{2} = -5 \end{cases} \Rightarrow (x-1) \cdot (x+5) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5 \end{cases}$$

$-\infty$ **-5**   **1** ∞

x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > -5	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Dominio de definición
$D(f) = \forall x \in \Re / (x < -5) \cup (x > 1)$

b)

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5} = \frac{2 \cdot (x+2)}{(x+5) \cdot (x-1)} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot (x+2)}{(x+5) \cdot (x-1)} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > -2 \\ x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > -5 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 1 \end{cases}$$

$-\infty$ **- 5**   **1** ∞

x > - 5	**(-)**		**(+)**
2 > 0	**(+)**		**(+)**
x > - 2	**(-)**		**(+)**
x > 1	**(-)**		**(+)**
Solución	**(-) f'(x) < 0**		**(+) f'(x) > 0**

Crecimiento $\forall x \in \Re / x > 1$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / x < -5$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada las funciones: $y = 9 - x^2 \quad , \quad y = 2x + 1$ se pide:

a) (1 punto). Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas

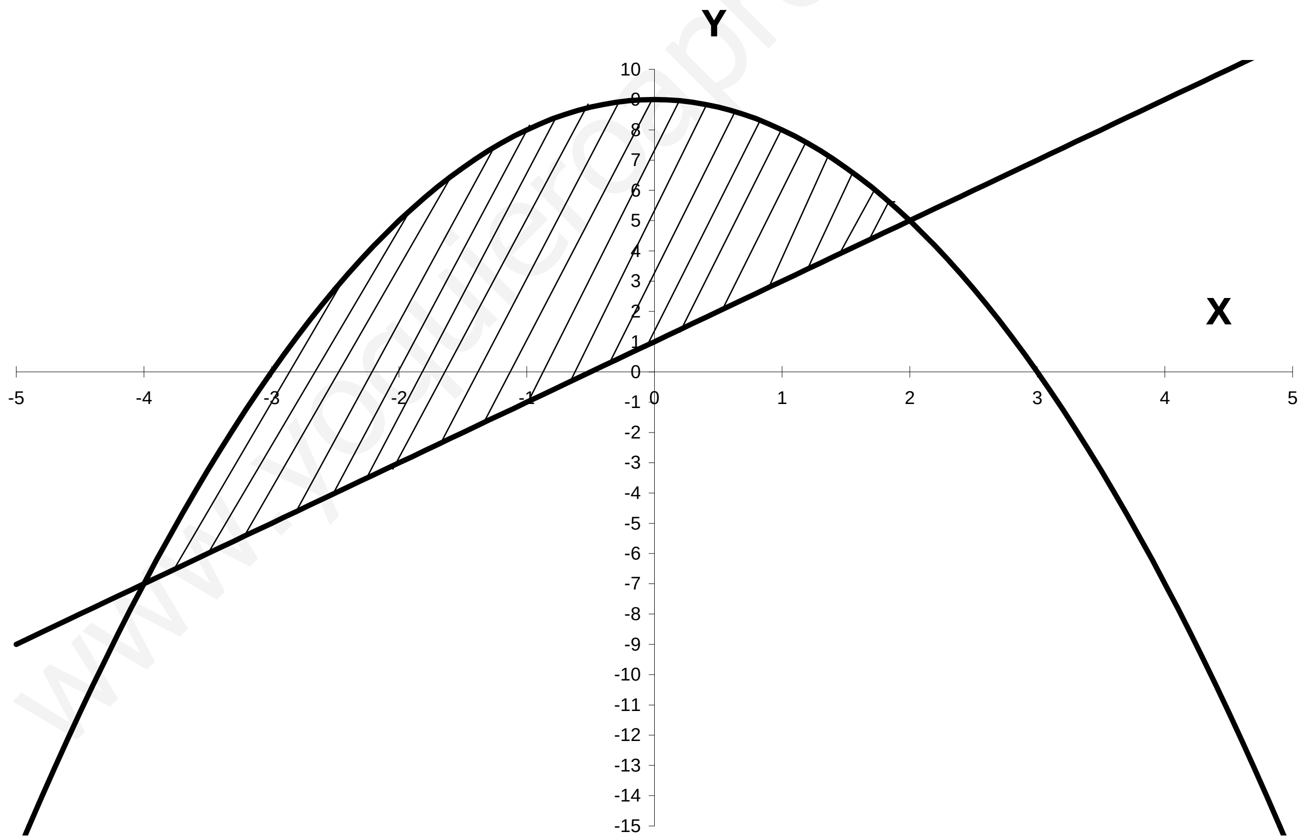
b) (1 punto). Calcular el área del recinto ocupado

c) (1 punto). Hallar el volumen del cuerpo obtenido al hace girar alrededor del eje **OX** el recinto acotado por la gráfica de **y = 9 – x²** y el eje **OX**

a) Llamando $f(x) = 9 - x^2 \quad , \quad g(x) = 2x + 1$. La gráfica de la función **f(x)** es una parábola y la función **g(x)** es una función lineal siendo su gráfica una recta definida por dos puntos.

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f(0) = 9 - 0^2 = 9 \Rightarrow \text{Máximo en } (0\ ,9) \\ \text{Corte con } OX \text{ cuando } y = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} (-3\ ,0) \\ (3\ ,0) \end{cases} \\ \text{Corte con } OY \text{ cuando } x = 0 \Rightarrow f(0) = 9 - 0^2 = 9 \Rightarrow (0\ ,9) \end{cases}$$

$$g(x) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow g(0) = 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow (0\ ,1) \\ x = 2 \Rightarrow g(2) = 2.2 + 1 = 5 \Rightarrow (2\ ,5) \end{cases}$$



Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

Puntos de corte de las dos funciones

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 9-x^2=2x+1\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow \Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-2+6}{2}=2 \\ x=\dfrac{-2-6}{2}=-4 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ \ funciones\ con\ OX\Rightarrow\begin{cases} f(x)\Rightarrow\begin{cases}(-3,0)\\(3,0)\end{cases} \\ g(x)\Rightarrow 0=2x+1\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\end{cases}$$

$b)$

$$A=\left|\int_{-4}^{-3}(2x+1)\,dx\right|-\left|\int_{-4}^{-3}\left(9-x^2\right)dx\right|+\int_{-3}^{-\frac{1}{2}}\left(9-x^2\right)dx+\left|\int_{-3}^{-\frac{1}{2}}(2x+1)\,dx\right|+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(9-x^2\right)dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)\,dx$$

$$A=\int_{-4}^{-3}(-2x-1)\,dx-\int_{-4}^{-3}\left(-9+x^2\right)dx+\int_{-3}^{-\frac{1}{2}}\left(9-x^2\right)dx+\int_{-3}^{-\frac{1}{2}}(-2x-1)\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(9-x^2\right)dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)\,dx$$

$$A=\int_{-4}^{-3}(-2x-1)\,dx+\int_{-4}^{-3}\left(9-x^2\right)dx+\int_{-3}^{-\frac{1}{2}}\left(9-x^2\right)dx+\int_{-3}^{-\frac{1}{2}}(-2x-1)\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(9-x^2\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x-1)\,dx$$

$$A=\int_{-4}^{2}(-2x-1)\,dx+\int_{-4}^{2}\left(9-x^2\right)dx=\int_{-4}^{2}\left(-2x+8-x^2\right)dx=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-4}^{2}+8\cdot[x]_{-4}^{2}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-4}^{2}$$

$$A=-\left[2^2-(-4)^2\right]+8\cdot[2-(-4)]-\frac{1}{3}\cdot\left[2^3-(-4)^3\right]=-(4-16)+8\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot[8-(-64)]=12+48-\frac{72}{3}$$

$$A=60-24=36\ u^2$$

$c)$

Como es simétrica respecto a OY

$$V=2\pi\int_0^3\left(9-x^2\right)^2dx=2\pi\int_0^3\left(81-18x^2+x^4\right)dx=2\pi\cdot\left\{81\cdot[x]_0^3-18\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^3+\frac{1}{5}\cdot\left[x^5\right]_0^3\right\}$$

$$V=2\pi\cdot\left\{81\cdot(3-0)-6\cdot\left(3^3-0^3\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(3^5-0^5\right)\right\}=2\pi\cdot\left(243-162+\frac{243}{5}\right)=2\pi\cdot\left(81+\frac{243}{5}\right)$$

$$V=2\pi\cdot\frac{405+243}{5}=2\pi\cdot\frac{648}{5}=\frac{1286}{5}\pi\ u^3$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta $r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$, se pide

a) (1 punto). Calcular los valores de ***a*** para que la recta ***r*** esté contenida en el plano π

b) (1 punto).Para el valor **a = - 2,** hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{11}{2}\right)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π

c) (1 punto). Para **a = - 2**, halla el seno del ángulo que forman ***r*** y π

a) El vector director de la recta **r** y el del plano tienen que ser perpendiculares, por lo tanto su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 5) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2, a, 4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1, 2, 5) \cdot (2, a, 4) = 0 \Rightarrow 2 + 2a + 20 = 0 \Rightarrow 2a = -22 \Rightarrow$$

$$a = -11 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 11y + 4z + 25 = 0$$

b) La recta **s,** que hay que hallar, tiene como vector director el del plano ya que es perpendicular a él.

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (2, -2, 4) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -\frac{11}{2} + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\lambda\right) - 2 \cdot (-2)\lambda + 4 \cdot \left(-\frac{11}{2} + 4\lambda\right) + 25}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 11^2}} \\ -\sqrt{6} = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\lambda\right) - 2 \cdot (-2)\lambda + 4 \cdot \left(-\frac{11}{2} + 4\lambda\right) + 25}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 11^2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{6} = \dfrac{3 + 4\lambda + 4\lambda - 22 + 16\lambda + 25}{\sqrt{4 + 4 + 121}} \\ -\sqrt{6} = \dfrac{3 + 4\lambda + 4\lambda - 22 + 16\lambda + 25}{\sqrt{4 + 4 + 121}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6 \cdot 129} = 24\lambda + 6 \\ -\sqrt{6 \cdot 129} = 24\lambda + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{86} = 6 \cdot (4\lambda + 1) \\ -3\sqrt{83} = 6 \cdot (4\lambda + 1) \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

b)Continuación

$$\begin{cases} \sqrt{86} = 8\lambda + 2 \\ -\sqrt{86} = 8\lambda + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{86} - 2 = 8\lambda \\ -\sqrt{86} - 2 = 8\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{86}-2}{8} = \lambda \\ -\dfrac{\sqrt{86}+2}{8} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{86}-2}{8} = \dfrac{\sqrt{86}+4}{4} \\ y = -2 \cdot \dfrac{\sqrt{86}-2}{8} = \dfrac{2-\sqrt{86}}{4} \\ z = -\dfrac{11}{2} + 4 \cdot \dfrac{\sqrt{86}-2}{8} = \dfrac{\sqrt{86}-13}{2} \end{cases} \\ P_2 \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{86}+2}{8} = \dfrac{4-\sqrt{86}}{4} \\ y = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{86}+2}{8} = \dfrac{2+\sqrt{86}}{4} \\ z = -\dfrac{11}{2} - 4 \cdot \dfrac{\sqrt{86}+2}{8} = -\dfrac{\left(\sqrt{86}+13\right)}{2} \end{cases} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 5) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2, -2, 4) \equiv (1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow sen\,\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_\pi}\right|} = \frac{\left|1.1 + 2 \cdot (-1) + 5.2\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{6}}$$

$$sen\,\alpha = \frac{9}{\sqrt{180}} = \frac{9 \cdot \sqrt{180}}{180} = \frac{\sqrt{180}}{20} = \frac{6\sqrt{5}}{20} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = 0{,}67082039324993690892275210061938 \Rightarrow$$

$$\alpha = 42^\circ 7' 49''$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones : $\begin{cases} 2x+my+3z=3 \\ x+y-2z=0 \\ 5x+(m+1)y+z=9 \end{cases}$, se pide:

a) (1’5 puntos). Discutir el sistema según los valores de ***m***

b) (0’5 puntos). Resolver el sistema para el caso **m = 0**

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & m+1 & 1 \end{vmatrix}=2-10m+3\cdot(m+1)-15+4\cdot(m+1)-m=-13-11m+3m+4m+3+4=-6-4m$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow -6-4m=0 \Rightarrow 4m=-6 \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

$$\forall m \in -\left\{-\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m=-\frac{3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -\frac{3}{2}+1 & 1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & -1 & 2 & 18 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & -8 & 0 \\ 20 & -2 & 4 & 36 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 13 & -26 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 91 & -182 & 42 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 120 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$$Si\ m=0 \Rightarrow |A|=-6-4.0=-6$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{3-27+6}{-6}=\frac{-18}{-6}=3 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-30+27+36-3}{-6}=\frac{30}{-6}=-5$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{18+3-15}{-6}=\frac{6}{-6}=-1 \Rightarrow Solución(3\ ,-5\ ,-1)$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ estudiarla para que valores de **a** tiene inversa y calcularla siempre que sea posible

$$Existe\ A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=a \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \forall a \in \Re-\{0\}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right) \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix} \Rightarrow adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}a & 1-a^2 & -1\\ 0 & a & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix}a & 1-a^2 & -1\\ 0 & a & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$