

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (1 punto). Calcula los límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$

b) (1 punto). Calcular la integral $\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2} dx$

c) (1 punto). Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4 + \frac{1}{e^{(x+1)}}} = \frac{2}{4 + \frac{1}{e^{(\infty+1)}}} = \frac{2}{4 + \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{4+0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-[(-x)+1]}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{(x-1)}} = \frac{2}{4 + e^{(\infty+1)}} = \frac{2}{4 + \infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2} dx = \int_1^4 \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \int_1^4 \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \cdot [\ln t]_1^4 = \frac{1}{6} \cdot (\ln 4 - \ln 1) = \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{4}{1} = \frac{\ln 4}{6}$$

$$1 + 3x^2 = t \Rightarrow 6x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 + 3 \cdot 1^2 = 4 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 + 3 \cdot 0^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25 > 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9+5}{2} = 7 \\ x = \frac{9-5}{2} = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14} = \sqrt{(x-2) \cdot (x-7)} \Rightarrow x^2 - 9x + 14 \geq 0 \Rightarrow (x-2) \cdot (x-7) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-7 > 0 \end{cases}$$

	-∞	2	7	∞
$x > 2$	(-)	(+)	(+)	
$x > 7$	(-)	(-)	(+)	
Solución	(+)	$f(x) > 0$	(-)	$f(x) < 0$
		(+)	$f(x) > 0$	

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (x \leq 2) \cup (x \geq 7)$$

$$f'(x) = \frac{2x-9}{\sqrt{x^2 - 9x + 14}} \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Derivada para } \forall x \in \mathbb{R} / (x < 2) \cup (x > 7)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado los planos $\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}, \text{ se pide:}$$

a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados **XY**, **XZ** e **YZ**

c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(r, \pi_1) = \frac{|2 \cdot (1 + 2\lambda) + 3 \cdot (-1 + \lambda) + (-2 + 2\lambda) - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 4\lambda - 3 + 3\lambda - 2 + 2\lambda - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} \\ d(r, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 3 \cdot (-2 + 2\lambda) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 6 - 6\lambda - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(r, \pi_1) = \frac{|9\lambda - 4|}{\sqrt{14}} \\ d(r, \pi_2) = \frac{|6 - \lambda|}{\sqrt{14}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\lambda - 4}{\sqrt{14}} = \frac{6 - \lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow 9\lambda - 4 = 6 - \lambda \Rightarrow 10\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \frac{9\lambda - 4}{\sqrt{14}} = -\frac{6 - \lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow 9\lambda - 4 = -6 + \lambda \Rightarrow 8\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \\ -\frac{9\lambda - 4}{\sqrt{14}} = \frac{6 - \lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow -9\lambda + 4 = 6 - \lambda \Rightarrow -8\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \\ -\frac{9\lambda - 4}{\sqrt{14}} = -\frac{6 - \lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow 9\lambda - 4 = 6 - \lambda \Rightarrow 10\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow P_1 \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} \\ y = -1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 - \frac{1}{4} \\ z = -2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Si } \lambda = 1 \Rightarrow P_2 \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 1 \\ y = -1 + 1 \\ z = -2 + 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow P_2(3, 0, 0)$$

c) Para hallar la proyección ortogonal hallaremos las proyecciones de dos puntos de la recta, uno puede ser el punto de corte **P** de la recta con el plano y el otro la proyección de un punto cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en la ecuación), para ello calcularemos una recta **s** perpendicular al plano (que tiene como vector director el del plano) que pasa por el punto **R** siendo la proyección el punto de corte de la recta **s** con el plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 3 \cdot (-2 + 2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 6 - 6\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$6 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 6 \\ y = -1 + 6 \\ z = -2 + 2 \cdot 6 \end{cases} \Rightarrow P(9, 5, 10)$$

Continuación del ejercicio 2 de la Opción A

$$\begin{cases} \vec{v}_s = \vec{v}_{\pi_2} = (2, 1, -3) \\ R(1, -1, -2) \end{cases} \Rightarrow S \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -2 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\mu) + (-1 + \mu) - 3 \cdot (-2 + 3\mu) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2 + 4\mu - 1 + \mu + 6 - 9\mu - 1 = 0 \Rightarrow 6 - 4\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow S \equiv \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \\ y = -1 + \frac{3}{2} \\ z = -2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow S \left(4, \frac{1}{2}, 1\right)$$

La recta que une los puntos **P** y **S** es la proyección r' recta ortogonal de **r**

$$\vec{v}_{r'} = \overrightarrow{PS} = \left(4, \frac{1}{2}, 1\right) - (9, 5, 10) = \left(-5, -\frac{9}{2}, -9\right) \equiv (10, 9, 18) \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 9 + 10\eta \\ y = 5 + 9\eta \\ z = 10 + 18\eta \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro **a**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

Orlando el *det er min* ante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a + 6a + 4 - 3a = 2a + 4 \Rightarrow \text{Si } 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Si } a = -2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Seguimos orlando

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ a+2 & 0 & a \end{vmatrix} = a + 3a(a+2) + 2(a+2) + 3a = a + 3a^2 + 6a + 2a + 4 + 3a = 3a^2 + 12a + 4$$

$$-3a^2 - 12a - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 12a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 96 > 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{6} = -2 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \\ a = -2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Otra forma de realización del problema 2 de la opción A

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & a+2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -3a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & a+2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & -4 & 2a \\ 0 & -4(a+2) & -4a \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & 0 & 2a-2-3a \\ 0 & -4(a+2)+4(a+2) & -4a-(2+3a)(a+2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & -4a-(2a+4+3a^2+6a) \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & -4a-8a-4-3a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2-a=0 \Rightarrow a=-2 \\ -3a^2-12a-4=0 \Rightarrow 3a^2+12a+4=0 \Rightarrow \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 96 > 0 \Rightarrow a = \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{6} = -2 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \\ a = -2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0'5 puntos). Calcular el determinante de la matriz \mathbf{M}
 b) (1 punto). Hallar la matriz \mathbf{M}^2
 c) (1 punto). Hallar la matriz \mathbf{M}^{25}

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos}^2 x = -(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x) = -1$$

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x & \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

c)

$$M^3 = M^2 \cdot M = I \cdot M = M \Rightarrow M^4 = M^2 \cdot M^2 = I \cdot I = I \Rightarrow M^5 = M^4 \cdot M = I \cdot M = M \dots$$

$$M^{2n} = M^2 \cdot M^2 \dots (n \text{ veces}) \dots M^2 = I \Rightarrow M^{2n+1} = M^{2n} \cdot M = I \cdot M = M \Rightarrow m \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow$$

$$M^{25} = M$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el punto $\mathbf{P}(0, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de \mathbf{P} respecto a r

b) (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto \mathbf{P} , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s

a) Para calcular el punto \mathbf{P}' , simétrico de \mathbf{P} tendremos que hallar un plano π que contenga al punto \mathbf{P} sea perpendicular a la recta r . Para ello utilizaremos el vector director de la recta r que es el vector director del plano buscado y que es perpendicular al vector que une el punto \mathbf{P} con el punto genérico \mathbf{G} del plano, el producto escalar de estos dos vectores es nulo, al ser perpendiculares, y la ecuación del plano pedido.

Se calcula, a continuación, el punto \mathbf{Q} intersección del plano hallado π y la recta r , que es el punto medio entre \mathbf{P} y \mathbf{P}'

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (0, 1, 1) = (x, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{PG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 1, -1) \cdot (x, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow 2x + (y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de intersección } Q \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - (-\lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + \lambda = 0$$

$$6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ y = -1 + \left(-\frac{1}{6}\right) \\ z = -\left(-\frac{1}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow Q \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{x_{P'} + 0}{2} \Rightarrow x_{P'} = \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{6} = \frac{y_{P'} + 1}{2} \Rightarrow y_{P'} = -\frac{14}{6} - 1 = -\frac{7}{3} - 1 = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{6} = \frac{z_{P'} + 1}{2} \Rightarrow z_{P'} = \frac{2}{6} - 1 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

b)

$$\vec{Pr} = (1 + 2\lambda, -1 + \lambda, -\lambda) - (0, 1, 1) = (1 + 2\lambda, -2 + \lambda, -1 - \lambda) \Rightarrow \vec{Pr} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{Pr} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1 + 2\lambda, -2 + \lambda, -1 - \lambda) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow -1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\vec{Pr} = [1 + 2 \cdot (-1), -2 + (-1), -1 - (-1)] = (-1, -3, 0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 0 - \alpha \\ y = 1 - 3\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 2x + 4y = 4k \\ -k^3x + k^2y + kz = 0 \\ x + ky = k^2 \end{cases}$$
, se pide:

- a) (2 puntos). Discutirlo en función del parámetro **k**
 b) (0'5 puntos). Resolverlo cuando **k = 1**
 c) (0'5 puntos). Resolverlo cuando **k = 2**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 4k - 2k^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 4k - 2k^2 = 0 \Rightarrow 2k(2 - k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall k \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$

Si $k = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Sistema Compatible In det er min ado} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$$

Solución $(0, 0, \lambda)$

Si $k = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

Sistema Compatible In det er min ado

b)

Si $k = 1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 + z = 2 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow x + 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow$$

$x = 0 \Rightarrow \text{Solución } (0, 1, -1)$

b)

Si $k = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible In det er min ado} \Rightarrow \text{Teniendo en cuenta el apartado a)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 8y + z = 12 \Rightarrow z = 12 - 8y \Rightarrow x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y$$

Solución $(4 - 2\alpha, \alpha, 12 - 8\alpha)$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

$$\text{Dada la función } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ hallar el valor de } k \text{ para que } f \text{ sea continua en}$$

$x = 0$. Justificar la respuesta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{\cos 0 - 1}{\sin 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin 0}{\cos 0} = -\frac{0}{1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = k = 0$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$

a)

$$\text{Regiones de } f(x) \Rightarrow \begin{cases} \text{Negativo} \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi \\ \text{Positivo} \Rightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow A = \left| \int_0^{\pi} -\sin x \, dx \right| + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \, dx$$

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi} - (-1) \cdot [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi)$$

$$A = -(-1 - 1) + [1 - (-1)] = 2 + 2 = 4 \text{ u}^2$$

b)

$$V = \pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2 \, dx + \pi \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx + \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{2} \, dx$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{2} [x]_0^{\pi} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx = \frac{\pi}{2} (\pi - 0) - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \cos t \frac{dt}{2} = \pi^2 - \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \pi^2 - \frac{\pi}{8} (\cos 4\pi - \cos 0)$$

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2\pi \Rightarrow t = 4\pi \end{cases}$$

$$V = \pi^2 - \frac{\pi}{8} \cdot (1 - 1) = \pi^2 \text{ u}^3$$