OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 2 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$ se pide:

a) (1'5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1'5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - \lambda^2 + 3\lambda = 6\lambda \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in \Re - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0 \neq 2 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ \lambda = 1$

$Es\ un\ Sistema\ Compatible\ Deter\min ado, pudiendose\ solucionar\ por\ Gauss\ o\ por\ Cramer$

$Por\ Gauss$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 - 2z = -1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}$$

$$Solución \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función: $f(x)\equiv\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de **f**

b) (1'5 puntos).Calcula el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de **f**, el eje **OX** y las rectas **x = 0** y **x = 3**

a)

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^3}=\frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3}=\frac{3-x}{(x+1)^3}\Rightarrow$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3-x=0\Rightarrow x=3\Rightarrow f''(x)=\frac{-(x+1)^3-3(x+1)^2(3-x)}{(x+1)^6}=\frac{-(x+1)-3(3-x)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-x-1-9+3x}{(x+1)^4}=\frac{2x-10}{(x+1)^4}\Rightarrow f''(3)=\frac{2\cdot 3-10}{(3+1)^4}=-\frac{4}{4^4}=-\frac{1}{4^3}<0\Rightarrow Máximo$$

$$Máximo\ relativo\ en\ x=3\Rightarrow f(3)\equiv\frac{3-1}{(3+1)^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}\Rightarrow\left(3\,,\frac{1}{8}\right)$$

Asíntotas verticales

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow f(-1)\equiv\frac{-1-1}{(-1+1)^2}=-\frac{2}{0}\Rightarrow En\ x=-1\Rightarrow Asíntota\ vertical$$

$$En\ x=-1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-2}{(-1^-+1)^2}=-\dfrac{2}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-2}{(-1^++1)^2}=-\dfrac{2}{0^+}=-\infty\end{cases}\Rightarrow Asíntota\ vertical$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1+2\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{0-0}{1+0+0}$$

$$Asíntota\ horizontal\ \ y=0\Rightarrow cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-2\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1}$$

$$Asíntota\ horizontal\ \ y=0\Rightarrow cuando\ x\to-\infty$$

El máximo que hemos dicho relativo es absoluto también ya que su valor, como función, es mayor que 0 y evidentemente mayor que $-\infty$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

Punto de corte de la función con OX

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1\ ,0)$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\in(0\ ,1)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}=-\dfrac{4}{2\cdot 9}=-\dfrac{2}{9}<0 \\ x=2\in(1\ ,3)\Rightarrow f(2)=\dfrac{2-1}{(2+1)^2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int\frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x+1}\,dx-2\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt-2\int\frac{1}{t^2}\,dx=\ln t-2\int t^{-2}\,dx=\ln(x+1)-2\cdot(-1)\cdot t^{-1}$$

$$x+1=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}\Rightarrow A(x+1)+B=x-1\Rightarrow\begin{cases}x=-1\Rightarrow A(-1+1)+B=-1-1\\ x=-2\Rightarrow A(-2+1)+B=-2-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A\cdot 0+B=-2\Rightarrow B=-2 \\ A\cdot(-1)+B=-3\Rightarrow -A-2=-3\Rightarrow -A=-1\Rightarrow A=1\end{cases}$$

$$I=\ln(x+1)+2\cdot\frac{1}{t}=\ln(x+1)+\frac{2}{(x+1)}+K\Rightarrow$$

$$A=\left|\int_0^1\frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx\right|+\int_1^3\frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx=\int_1^0\frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx+\int_1^3\frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$A=\left[\ln(x+1)+\frac{2}{(x+1)}\right]_1^0+\left[\ln(x+1)+\frac{2}{(x+1)}\right]_1^3=$$

$$A=\left[\ln(0+1)+\frac{2}{(0+1)}-\ln(1+1)-\frac{2}{(1+1)}\right]+\left[\ln(3+1)+\frac{2}{(3+1)}-\ln(1+1)-\frac{2}{(1+1)}\right]$$

$$A=\ln 1+\frac{2}{1}-\ln 2-\frac{2}{2}+\ln 4+\frac{2}{4}-\ln 2-\frac{2}{2}=2+\frac{1}{2}-1-1+\ln 4-2\ln 2=\left(\frac{1}{2}+\ln 4-2\ln 2\right)u^2$$

$$\text{o también}\quad A=\frac{1}{2}+\ln 4-\ln 2^2=\frac{1}{2}+\ln 4-\ln 4=\frac{1}{2}\,u^2$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ y $s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$, se pide

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de **r** y **s**

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas **r** y **s**

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} \Rightarrow Son\ paralelas\ o\ coincidentes$$

Veamos si no tienen o tienen infinito puntos comunes

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 2\lambda = 5 + 2\mu \\ \lambda = 4 + \mu \\ -1 + \lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 6 \\ \lambda - \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 3 \\ \lambda - \mu = 4 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases}$$

Las rectas **r** y **s son paralelas** al no tener ningún punto común

b) Tomando el vector común a ambas, el vector formado por un punto de cada una y el vector genérico formado por uno cualquiera de esos puntos y el genérico, que son coplanarios se generará el plano π pedido.
Se podrá realizar, también, generando un haz de planos por una de la rectas y hallando la que pasa por uno de los puntos de la otra.

Primera forma

$a)$

$$Tomando \Rightarrow \begin{cases} R(-1,0,-1) \Rightarrow Punto\ dado\ en\ la\ ecuación\ de\ la\ recta\ r \\ S(5,4,0) \Rightarrow Punto\ dado\ en\ la\ ecuación\ de\ la\ recta\ s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{RS} = (5,4,0) - (-1,0,-1) = (6,4,1) \\ \overrightarrow{RG} = (x,y,z) - (-1,0,-1) = (x+1,y,z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x + 1 + 6y + 8(z+1) - 6(z+1) - 2y - 4(x+1) = 0 \Rightarrow -3(x+1) + 4y + 2(z+1) = 0 \Rightarrow -3x + 4y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

Segunda forma.- Tomando el haz de recta generados por **r** y el punto **S**

$$r \equiv \begin{cases} x + 1 = 2y \Rightarrow x - 2y + 1 = 0 \\ z + 1 = y \Rightarrow z - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow Haz\ de\ planos \Rightarrow x - 2y + 1 + a(z - y + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$Pasando\ por\ S \Rightarrow 5 - 2 \cdot 4 + 1 + a(0 - 4 + 1) = 0 \Rightarrow -2 - 3a = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$x - 2y + 1 - \frac{2}{3}(z - y + 1) = 0 \Rightarrow 3x - 6y + 3 - 2z + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0 \quad y \quad \beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide
a) (1 punto) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta **r** determinada por la intersección de α con β

b) (1 punto) Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $\left(\sqrt{2}\ , 1\ , 0\right)$

a)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ -2x + 4y - 12z = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y - 10z + 1 = 0 \Rightarrow 5y = 10z - 1 \Rightarrow y = \frac{10z - 1}{5} \Rightarrow$$

$$2x + 2z - \frac{1}{5} + 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 4z + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow 2x = -4z - \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{-4z - \frac{4}{5}}{2} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b)
El plano buscado, al ser paralelo, es de la forma 2x + y + z + D = 0, y pasara por el punto dado, con esos datos calcularemos D

$$2x + y + 2z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} + 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \cdot \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \gamma \equiv 2x + y + 2z - 2 \cdot \sqrt{2} - 1 = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Calcular **A^2 – 4A – 3I**

b) (1 punto). Demostrar que la matriz **A^{-1}** es $\frac{1}{3}(4I-A)$

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz **A – 2I**

a)

$$\begin{cases} A^2=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4 & -4\\ 4 & -3 & -4\\ -8 & 8 & 9\end{pmatrix}\\ 4A=4\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4 & -4\\ 4 & 0 & -4\\ -8 & 8 & 12\end{pmatrix}\\ 3I=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow$$

$$A^2-4A-3I=\begin{pmatrix}5 & -4 & -4\\ 4 & -3 & -4\\ -8 & 8 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -4 & -4\\ 4 & 0 & -4\\ -8 & 8 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}=-6\cdot I$$

b)

$$4I-A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{1}{3}(4I-A)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{vmatrix}=-2-2+4+3=3\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=4I-A$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

c)

$$A-2I=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left|A-2I\right|=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2-2+4+1=1\Rightarrow\left|A-2I\right|\neq 0\Rightarrow$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{\left|A-2I\right|}\cdot\left[adj\,(A-2I)^t\right]\Rightarrow(A-2I)^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[adj\,(A-2I)^t\right]=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=(A-2I)^t$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado los puntos **A (1 , -3 , 0)** , **B (3 , 1 , - 2)** , **C (7 , 2 , 3)** , **D (5 , - 2 , 5)** , **E (1 , 0 , 2)** se pide:

a) (1 punto).Demostrar que los puntos **A** , **B** , **C** y **D** son coplanarios
b) (1 punto).Demostrar que el polígono **ABCD** es un paralelogramo y calcular su área
c) (1 punto).Hallar la distancia del punto **E** al plano π determinado por los puntos **A** , **B** , **C** y **D**

a)
Hallaremos el plano π que pasa por los puntos **A**, **B** y **C**, determinado por los vectores **AB**, **AC** y **AG** siendo el determinante formado por ellos nulo, y la ecuación del plano pedida. Despues veremos si el punto D pertenece al plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,1,-2)-(1,-3,0) = (2,4,-2) \equiv (1,2,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (7,2,3)-(1,-3,0) = (6,5,3) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(1,-3,0) = (x-1,y+3,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ x-1 & y+3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$5z + 6\cdot(x-1) - 6\cdot(y+3) + 5\cdot(x-1) - 3\cdot(y+3) - 12z = 0 \Rightarrow 11\cdot(x-1) - 9\cdot(y+3) - 7z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0 \Rightarrow$$

$$Veamos\ si\ D\ pertenece\ al\ plano \Rightarrow 11\cdot 5 - 9\cdot(-2) - 7\cdot 5 - 38 = 0 \Rightarrow 55 + 18 - 35 - 38 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

El punto D pertenece al plano π, por lo tanto A, B, C y D son coplanarios

b) Veremos si son paralelos los vectores **AB** y **CD,** asimismo y, para ser paralelogramo lo serán, también, **BC** y **AD**

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,1,-2)-(1,-3,0) = (2,4,-2) \\ \overrightarrow{CD} = (5,-2,5)-(7,2,3) = (-2,-4,2) \equiv (2,4,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \\ \begin{cases} \overrightarrow{BC} = (7,2,3)-(3,1,-2) = (4,1,5) \\ \overrightarrow{AD} = (5,-2,5)-(1,-3,0) = (4,1,5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow$$

Es un paralelogramo

c)

$$d(E,\pi) = \frac{|11\cdot 1 - 9\cdot 0 - 7\cdot 2 - 38|}{\sqrt{11^2 + 9^2 + 7^2}} = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{121 + 81 + 49}} = \frac{|-41|}{\sqrt{251}} = \frac{41\cdot\sqrt{251}}{251}\ u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+tg\ x}-\sqrt{1-tg\ x}}{x}$

a)

$$\lim_{x\to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0}} = 0\cdot e^{\infty} = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-1)\frac{1}{x^2}}{(-1)\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tg\ x}-\sqrt{1-tg\ x}}{x} = \frac{\sqrt{1+tg\ 0}-\sqrt{1-tg\ 0}}{0} = \frac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+tg\ x}-\sqrt{1-tg\ x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+tg\ x}+\sqrt{1-tg\ x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+tg\ x}+\sqrt{1-tg\ x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+tg\ x-(1-tg\ x)}{x\cdot\left(\sqrt{1+tg\ x}+\sqrt{1-tg\ x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+tg\ x-1+tg\ x}{x\cdot\left(\sqrt{1+tg\ x}+\sqrt{1-tg\ x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2tg\ x}{x\cdot\left(\sqrt{1+tg\ x}+\sqrt{1-tg\ x}\right)} = \frac{2tg\ 0}{0\cdot\left(\sqrt{1+tg\ 0}+\sqrt{1-tg\ 0}\right)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{cos^2\ x}}{\left(\sqrt{1+tg\ x}+\sqrt{1-tg\ x}\right)+\left(\frac{\frac{1}{cos^2\ x}}{2\sqrt{1+tg\ x}}+\frac{-\frac{1}{cos^2\ x}}{2\sqrt{1-tg\ x}}\right)\cdot x} =$$

$$= \frac{\frac{2}{cos^2\ 0}}{\left(\sqrt{1+tg\ 0}+\sqrt{1-tg\ 0}\right)+\left(\frac{\frac{1}{cos^2\ 0}}{2\sqrt{1+tg\ 0}}+\frac{-\frac{1}{cos^2\ 0}}{2\sqrt{1-tg\ 0}}\right)\cdot 0} = \frac{\frac{2}{1}}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)+\left(\frac{\frac{1}{1}}{2\sqrt{1+0}}+\frac{-\frac{1}{1}}{2\sqrt{1-0}}\right)\cdot 0} =$$

$$= \frac{2}{(1+1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot 0} = \frac{2}{2+0\cdot 0} = 1$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada función $f(x)=\frac{1}{2}-sen\ x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de **f**, el eje **OX** y las rectas **x = 0** y $x=\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-sen\ x=0 \Rightarrow sen\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

$$Signos\ \ función \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}\in\left(0\ ,\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}-sen\ \frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}-0{,}25881904510252..>0 \\ \frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{6}\ ,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}-sen\ \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-sen\ x\right)dx+\left|\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-sen\ x\right)dx\right|=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-sen\ x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-sen\ x\right)dx=$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot[x]_0^{\frac{\pi}{6}}+[\cos x]_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2}\cdot[x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-[\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-0\right)+\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos 0\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$A=\frac{\pi}{12}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{6\pi-2\pi}{12}-\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}-\frac{4\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}+\frac{2\sqrt{3}-2}{2}$$

$$A=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}-\frac{\pi}{12}=\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right)u^2=0{,}99385019536802673006599995677916\ u^2$$