OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3x+A & si \quad x\le 3 \\ -4+10x-x^2 & si \quad x>3 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el valor de ***A*** para que ***f(x)*** sea continua. ¿Es derivable para ese valor de ***A***?
b) (1 punto) Hallar los puntos en los que ***f' (x) = 0***.
c) (1 punto) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de ***f(x)*** en el intervalo **[4 , 8]**

$a)$

$$\begin{cases} f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3\cdot 3+A=9+A \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-4+10\cdot 3-3^2=17 \end{cases} \Rightarrow f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow 9+A=17 \Rightarrow A=8$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x<3 \\ 10-2x & si \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=10-2\cdot 3=4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f'(x)=3\ne \lim_{x\to 3^+} f(x)=4$$

Sea cual sea el valor de **A** la función **no es derivable** en el punto **x = 3**

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x<3 \\ 10-2x & si \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\ne 0 \Rightarrow No\ existe\ en\ el\ intervalo\ x<3 \\ 10-2\cdot x=0 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5\in(3\ ,\infty) \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<3 \\ -2 & si \quad x>3 \end{cases}$$

$$Como\ f''(x)=-2 \Rightarrow En\ x=5 \Rightarrow f(5)=-4+10\cdot 5-5^2=50-29=21 \Rightarrow Máximo\ relativo$$

$c)$

$$\begin{cases} f(4)=-4+10\cdot 4-4^2=40-20=20 \\ f(8)=-4+10\cdot 8-8^2=80-68=12 \end{cases} \Rightarrow Como \begin{cases} 20<21 \Rightarrow Máximo\ absoluto\ en\ x=5 \\ 20>12 \Rightarrow Mínimo\ absoluto\ en\ x=8 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6 \\ x + (a+1)y + z = 3 \\ (a-1)x - ay - 3z = -3 \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores de ***a*.**

b) (1 punto) Resolverlo para ***a* = −1**.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{vmatrix} = -9\,(a+1) + a\,(a-1) - 4a - 4\,(a+1)(a-1) + 3a + 3a \Rightarrow$$

$$|A| = -9a - 9 + a^2 - a - 4\,(a^2 - 1) + 2a = -8a - 9 + a^2 - 4a^2 + 4 = -3a^2 - 8a - 5$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -3a^2 - 8a - 5 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 8a + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-8+2}{6} = -1 \\ a = \dfrac{-8-2}{6} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \left\{ -\frac{5}{3}\,,\,-1 \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a = -\frac{5}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -\frac{5}{3} & 4 & 6 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -3 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -5 & 12 & 18 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ -8 & 5 & -9 & -9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & -18 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 18 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 36 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ 1 & -11 & 0 & 18 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$rang(A) = 2 \neq rang(A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ a = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ a = -1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x + z = 3 \Rightarrow x = 3 - z \Rightarrow -y + z = -3 \Rightarrow y = z + 3 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (3 - \lambda\,,\,3 + \lambda\,,\,\lambda)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Se dan la recta ***r*** y el plano ***π***, mediante $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$; $\pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Tomados los infinitos puntos **R** de la recta de su ecuación expresada en paramétricas, hallaremos aquel o aquellos que cumplen la condición impuesta

$$R\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow d(R\,,\pi) = 1 \Rightarrow \frac{2\,(4+2\lambda) + (1-\lambda) - 2(2+3\lambda) - 7}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\frac{8 + 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - 6\lambda - 7}{\sqrt{9}} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3\lambda = 3 \Rightarrow 3\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \\ -2 - 3\lambda = -3 \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_1\begin{cases} x = 4 + 2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \\ y = 1 - \left(-\frac{5}{3}\right) \\ z = 2 + 3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow R_1\left(\frac{2}{3}\,,\frac{8}{3}\,,-3\right) \\ R_2\begin{cases} x = 4 + 2\cdot\frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{1}{3} \\ z = 2 + 3\cdot\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow R_2\left(\frac{14}{3}\,,\frac{2}{3}\,,3\right) \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-2}$; $s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$ se pide:

a) **(1,5 puntos)** Hallar la ecuación del plano que pasa por ***A*(2 , 3 , 4**) y es paralelo a las rectas ***r*** y ***s***.
b) **(0,5 puntos)** Determinar la ecuación de la recta que pasa por ***B*(4 ,−1 , 2)** y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

a) El vector del plano pedido π tiene como vector director al vector $\vec{u}$ que es perpendicular a los vectores directores de las rectas r y s; lo hallaremos como el producto vectorial de estos dos últimos vectores.

El vector hallado $\vec{u}$ es perpendicular al vector AG, siendo G el punto genérico del plano y por ello su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,2\,,-2) \equiv (1\,,1\,,-1) \\ \begin{cases} y = 4-x \\ z = 4-2x \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1\,,-1\,,-2) \equiv (-1\,,1\,,2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{v_\pi} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (2\,,3\,,4) = (x-2\,,y-3\,,z-4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(3\,,-1\,,2)\cdot(x-2\,,y-3\,,z-4) = 0 \Rightarrow 3x-6-y+3+2z-8=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x-y+2z-11=0$$

b) La recta **t** pedida es perpendicular al plano, debido a ello su vector director es el del plano; el punto **B** acaba por determinarla

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,-1\,,2) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 4+3\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos
Dado el punto ***P*(2 , 1 ,−1),** se pide:
a) **(0,5 puntos)** Hallar el punto ***P'*** simétrico de ***P*** respecto del punto ***Q*(3, 0, 2).**
b) **(1,25 puntos)** Hallar el punto ***P''*** simétrico de ***P*** respecto de la recta ***r* ≡ *x* − 1 = *y* − 1 = *z*.**
c) **(1,25 puntos)** Hallar el punto ***P'''*** simétrico de ***P*** respecto del plano ***π* ≡ *x* + *y* + *z* = 3.**

a) El punto dado Q es el punto medio entre punto P y el pedido **P'**

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{P'} = 6 \Rightarrow x_{P'} = 4 \\ 0 = \dfrac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + y_{P'} = 0 \Rightarrow y_{P'} = -1 \\ 2 = \dfrac{-1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P'} = 4 \Rightarrow z_{P'} = 5 \end{cases} \Rightarrow P'(4\,,-1\,,5)$$

b) Hallaremos un plano π' que contiene a **P** y que es perpendicular a la recta dada **r**, por ello el vector director de esta recta es el vector del plano; vector que es perpendicular al vector PG, siendo el producto escalar de ambos, al ser perpendiculares, nulo y la ecuación del plano buscada.
El punto de intersección **Q'** del plano hallado y la recta **r** es el punto medio entre **P** y **P''**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi'}} = \overrightarrow{v_r} = (1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,\,y\,,\,z) - (2\,,1\,,-1) = (x-2\,,\,y-1\,,\,z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,1\,,1)\cdot(x-2\,,\,y-1\,,\,z+1) = 0 \Rightarrow x-2+y-1+z+1 = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x+y+z-2 = 0$$

Punto de intersección **Q** de la recta **r** con el plano π

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow (1+\lambda)+(1+\lambda)+\lambda-2 = 0 \Rightarrow 3\lambda+2-2 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q' \begin{cases} x = 1+0 \\ y = 1+0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2 + x_{P''}}{2} \Rightarrow 2 + x_{P''} = 2 \Rightarrow x_{P''} = 0 \\ 1 = \dfrac{1 + y_{P''}}{2} \Rightarrow 1 + y_{P''} = 2 \Rightarrow y_{P''} = 1 \\ 0 = \dfrac{-1 + z_{P''}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P''} = 0 \Rightarrow z_{P''} = 1 \end{cases} \Rightarrow P''(0\,,1\,,1)$$

Continuación del Problema 1 de la Opción B

c) Hallaremos una recta **s,** perpendicular al plano π , cuyo vector director es el del plano, que conjuntamente con el punto **P** definen la recta buscada
El punto de intersección **Q’’** de la recta **s** hallada con el plano π es el punto medio de **P y P’’’**

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -1+\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$Inter\sec ción\ Q''\ entre\ la\ recta\ s\ y\ el\ \ plano\ \pi$$

$$(2+\alpha)+(1+\alpha)+(-1+\alpha)=3 \Rightarrow 3\alpha+2=3 \Rightarrow 3\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow Q''\begin{cases} x = 2+\frac{1}{3} \\ y = 1+\frac{1}{3} \\ z = -1+\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{3} = \frac{2+x_{P''}}{2} \Rightarrow 6+3x_{P'''} = 14 \Rightarrow 3x_{P'''} = 8 \Rightarrow x_{P'''} = \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} = \frac{1+y_{P''}}{2} \Rightarrow 3+3y_{P'''} = 8 \Rightarrow 3y_{P'''} = 5 \Rightarrow y_{P'''} = \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} = \frac{-1+z_{P'''}}{2} \Rightarrow -3+3z_{P'''} = -4 \Rightarrow 3z_{P'''} = -1 \Rightarrow z_{P'''} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P''\left(\frac{8}{3}\,,\frac{5}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos
Dada la función ***f*(*x*) = *x*^{2}sen *x***, se pide:
a) **(1 punto)** Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación ***f*(*x*) = 0** tiene alguna solución en el intervalo abierto **(*π*/2, *π*).**
b) **(1 punto)** Calcular la integral de ***f*** en el intervalo **[0*, π*].**
c) **(1 punto)** Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de ***y* = *f*(*x*)** en el punto **(*π, f*(*π*)).**

Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

a) Nos apoyamos en el **Teorema de Bolzano**
Si f**(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a)** $\neq$ **sign f(b)],** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que
f(c) = 0

La función ***f*(*x*) = *x*^{2}sen *x*** *es continua* en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$ y toma los valores siguientes en los extremos del intervalo $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}\cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} > 0 \\ f(\pi) = \pi^2 \cdot sen(\pi) = \pi^2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$ Como los signos son iguales **[sign f()** $\neq$ **sign f(b)],**entonces **NO EXISTE**, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que
f(c) = 0

Continuación del Problema 2 de la opción B

$b)$

$$I=\int x^2 sen\left(x\right)dx=-x^2\cos\left(x\right)-\int\left[-\cos\left(x\right)\right]2x\,dx=-2x\cos\left(x\right)+2\int x\cos\left(x\right)$$

$$\begin{cases} x^2=u\Rightarrow 2x\,dx=du \\ sen\left(x\right)dx=dv\Rightarrow v=\int sen\left(x\right)dx=-\cos\left(x\right)\end{cases}\qquad \begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ \cos\left(x\right)dx=dv\Rightarrow v=\int\cos\left(x\right)dx=sen\left(x\right)\end{cases}$$

$$I=-x^2\cos\left(x\right)+2\left[x\,sen\left(x\right)-\int sen\left(x\right)dx\right]=-2x\cos\left(x\right)+2x\,sen\left(x\right)-2\left[-\cos\left(x\right)\right]$$

$$I=-x^2\cos\left(x\right)+2x\,sen\left(x\right)+2\cos\left(x\right)$$

$$\int_0^{\pi}x^2 sen\left(x\right)dx=\left[-x^2\cos\left(x\right)\right]_0^{\pi}+2\left[x\,sen\left(x\right)\right]_0^{\pi}+2\left[\cos\left(x\right)\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left[-\pi^2\cos\left(\pi\right)-\left\{-0^2\cos\left(0\right)\right\}\right]+2\left[\pi\,sen\left(\pi\right)-0\,sen\left(0\right)\right]+2\left[\cos\left(\pi\right)-\cos\left(0\right)\right]=$$

$$=\left[-\pi^2\cdot\left(-1\right)+0\cdot 1\right]+2\left[\pi\cdot 0-0\cdot 0\right]+2\left[-1-1\right]=\left(\pi^2-4\right)u^2$$

$c)$

$$f'\left(x\right)=2x\,sen\left(x\right)+x^2\cos\left(x\right)\Rightarrow\begin{cases} f\left(\pi\right)=\pi^2 sen\left(\pi\right)=\pi^2\cdot 0=0 \\ m=f'\left(\pi\right)=2\pi\,sen\left(\pi\right)+\pi^2\cos\left(\pi\right)=2\pi\cdot 0+\pi^2\cdot\left(-1\right)=-\pi^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$m_n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-\pi^2}=\frac{1}{\pi^2}\Rightarrow y-0=\frac{1}{\pi^2}\left(x-\pi\right)\Rightarrow y=\frac{1}{\pi^2}x-\frac{1}{\pi}\Rightarrow\pi^2 y=x-\pi\Rightarrow x-\pi^2 y-\pi=0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \Re^3$, vectores columna. Si $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1$, $\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3$ $\det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$, calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos) $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$

b) (0,75 puntos) $\det(\vec{a}-\vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.

c) (0,75puntos) $\det(\vec{d}+3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d})$

$a)$

$$\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} & 3\vec{d} & \vec{b} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{d} & \vec{b} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 3$$

$b)$

$$\det(\vec{a}-\vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}-\vec{b} & \vec{c} & -\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} & -\vec{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\vec{b} & \vec{c} & -\vec{d} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} = 2 + 1 \cdot (-2) = 2 - 2 = 0$$

$c)$

$$\det(\vec{d}+3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{d}+3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & -3\vec{a}+\vec{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & -3\vec{a}+\vec{d} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & -3\vec{a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & -3\vec{a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{d} & \vec{b} \end{vmatrix} + 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{a} \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{a} \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)(-1) \cdot \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} + 2 \cdot (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \cdot (-1) + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} = -2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = -2 + 6 = 4$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - 2z = 2 \\ ax - y + z = -8 \\ 2x + az = 4 \end{cases}$ se pide:

a) **(1,5 puntos)** Discutir el sistema según los valores de ***a***.
b) **(0,5 puntos)** Resolverlo para ***a = -5***

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1+2a \\ 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1+2a \\ 0 & a+4 \end{vmatrix} = -a-4 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -a-4 = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a = -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas$$

$\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ a = -5 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow -y - 9.0 = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x - 2 \cdot (-2) = 2 \Rightarrow$$

$$x - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ -2\ ,\ 0)$$