OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & si \quad x<0 \\ xe^{-x} & si \quad x\ge 0 \end{cases}$ donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de **f** y calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) (0'5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva ***y = f(x)*** en **x = 2**.

c) (1'5 puntos) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

a)

$$1-x=0 \Rightarrow x=1\notin(-\infty\,,0)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\dfrac{\ln(1-0)}{1-0}=\dfrac{\ln 1}{1}=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0\cdot e^{-0}=0\cdot1=0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Es continua en } \forall x\in\Re$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

b)

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)\,e^{-x}\Rightarrow\begin{cases} y=f(2)=2\cdot e^{-2}=\dfrac{2}{e^2} \\ y'=f'(2)=(1-2)\,e^{-2}=\dfrac{-1}{e^2} \end{cases}\Rightarrow y-\frac{2}{e^2}=\frac{-1}{e^2}\cdot(x-2)$$

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{\ln(1-x)}{1-x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\int_{2}^{1}\frac{\ln t}{t}(-dt)+\left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx=$$

$$1-x=t\Rightarrow -dx=dt\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=-1\Rightarrow t=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x} \end{cases}$$

$$-\int_2^1\frac{\ln t}{t}dt-\left[x\,e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\int_{\ln 2}^{0}v\,dv-\left(1\cdot e^{-1}-0\cdot e^{-0}\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\cdot\left[v^2\right]_{\ln 2}^{0}-\left(\frac{1}{e}-0\right)-\left(\frac{1}{e}-e^{-0}\right)$$

$$\ln t=v\Rightarrow\frac{dt}{t}=dv\Rightarrow\begin{cases} t=2\Rightarrow v=\ln 2 \\ t=1\Rightarrow v=\ln 1=0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(0^2-\ln^2 2\right)-\frac{2}{e}+1=\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{e-2}{e}=\frac{2}{2}\ln 2-\frac{e-2}{e}=\ln 2-\frac{e-2}{e}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.
a) (1.5 puntos) Despeje **X** en la ecuación matricial **X (CD)$^{-1}$ = A + X (D^{-1}C^{-1} – B)**, siendo **A**, **B**, **C**, **D** matrices cuadradas invertibles. Exprese **X** de la forma más simple posible.

b) (1.5 puntos) Para $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ determine la matriz **Y** tal que

Y B = A.

$a)$

$$X(CD)^{-1}-X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)=A\Rightarrow X\left(C^{-1}D^{-1}-C^{-1}D^{-1}+B\right)=A\Rightarrow XB=A\Rightarrow XBB^{-1}=AB^{-1}\Rightarrow XI=AB^{-1}\Rightarrow$$
$$X=AB^{-1}$$

$b)$

$$YB=A\Rightarrow YBB^{-1}=AB^{-1}\Rightarrow YI=AB^{-1}\Rightarrow Y=AB^{-1}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\0&2\end{vmatrix}=-(-2)=2\neq 0\Rightarrow Existe\ B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot adj\ B^t\Rightarrow$$

$$B^t=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ B^t=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$Y=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&-4&1\\-2&-2&2\\-1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-2&\frac{1}{2}\\-1&-1&1\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro **a**, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) **(0.5 puntos)** Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) **(0.5 puntos)** Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) **(1 punto)** Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano **x = y**.

a) Si dos planos son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a\,, 1\,\,, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,, a\,\,, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow a = -1 \\ \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

b) Si dos planos son perpendiculares sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a\,, 1\,\,, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,, a\,\,, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{v_{\pi_2}} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}} = 0 \Rightarrow (a\,, 1\,\,, -1) \cdot (1\,, a\,\,, 1) = 0 \Rightarrow a + a - 1 = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

c) El vector director de la recta es igual o proporcional al del plano

El vector director de la recta, formado por los planos, es el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a\,, 1\,\,, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,, a\,\,, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + a^2\vec{k} - \vec{k} + a\vec{i} - a\vec{j} = (1+a)\vec{i} - (1+a)\vec{j} + (a^2-1)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = [(1+a)\,, -(1+a)\,, (a^2-1)] \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1\,, -1\,, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1+a}{1} = \frac{-(1+a)}{-1} = \frac{a^2-1}{0} \Rightarrow \left\{ \frac{1+a}{1} = \frac{a^2-1}{0} \Rightarrow \right.$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.
Dado el punto **P(2 , 1 , -1)**, determine el punto simétrico de **P** respecto al plano que pasa por los puntos **A(0 , 2 , -1)**, **B(1, -3 , 0)** y **C(2 , 1 , 1).**

Para determinar el plano π debemos de halla los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.
Determinado el plano hallaremos una recta **r** que pase por **P** y sea perpendicular al plano, siendo su vector director el del plano, calcularemos el punto **Q** que es la intersección del plano y la recta **r** y que es el punto medio entre **P** y su simétrico **P’**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,-3,0)-(0,2,-1)=(1,-5,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,1)-(0,2,-1)=(2,-1,2) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(0,2,-1)=(x,y-2,z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-10x+2(y-2)-(z+1)+10(z+1)+x-2(y-2)=0 \Rightarrow -9x+9(z+1)=0 \Rightarrow 9x-9z-9=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x-z-1=0$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1,0,-1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y=1 \\ z=-1-\lambda \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda)-(-1-\lambda)-1=0 \Rightarrow 2+\lambda+1+\lambda-1=0 \Rightarrow 2\lambda+2=0 \Rightarrow$$

$$2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x=2+(-1) \\ y=1 \\ z=-1-(-1) \end{cases} \Rightarrow Q(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{2+x_{P'}}{2} \Rightarrow 2+x_{P'}=2 \Rightarrow x_{P'}=0 \\ 1=\frac{1+y_{P'}}{2} \Rightarrow 1+y_{P'}=2 \Rightarrow y_{P'}=1 \\ 0=\frac{-1+z_{P'}}{2} \Rightarrow -1+z_{P'}=0 \Rightarrow z_{P'}=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'(0,1,1)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x+y+mz=1 \\ x-y+2z=-2 \\ 5x+(m+1)y+2z=4 \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro **m**.
b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso **m = 0**.
c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso **m = 2**.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & m-6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & m+6 & -8 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & m-6 \\ m+6 & -8 \end{vmatrix}=-[-32-(m+6)(m-6)]$$

$$|A|=-[-32-(m^2-36)]=-(-32-m^2+36)=-(-m^2+4)\Rightarrow m^2-4=0\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow m^2-4=0\Rightarrow$$

$$m^2=4\Rightarrow m=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases} m=-2 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{-2\ ,\ 2\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ m=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 8 & 0 & 8 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ incognitas$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$b)$

$Si\ m=0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow -2x=4\Rightarrow x=-2\Rightarrow -8+2z=-1\Rightarrow 2z=7\Rightarrow$$

$$z=\frac{7}{2}\Rightarrow -2-y+\frac{14}{2}=-2\Rightarrow y=\frac{14}{2}=7\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-2\ ,\ 7\ ,\ \frac{7}{2}\right)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

$c)$

$$Si\ m = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 4x + 4z = -1 \Rightarrow 4x = -1 - 4z \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - z \Rightarrow -\frac{1}{4} - z - y + 2z = -2 \Rightarrow$$

$$y = 2 - \frac{1}{4} + z \Rightarrow y = \frac{7}{4} + z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{4} - \lambda, \frac{7}{4} + \lambda, \lambda\right)$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran los puntos **A(0 , 5 , 3)**, **B(0 , 6 , 4)**, **C(2 , 4 , 2)** y **D(2 , 3 , 1)** y se pide:

a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono **ABCD** es un paralelogramo.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos **P** cuya proyección sobre el plano **ABCD** es el punto medio del paralelogramo.

a) El producto mixto de los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que es el volumen del paralelogramo que determinan debe de ser nulo, ya que son coplanarios.

Después estudiaremos que puntos determinan vectores que son paralelos.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 4) - (0, 5, 3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 4, 2) - (0, 5, 3) = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{AD} = (2, 3, 1) - (0, 5, 3) = (2, -2, -2) = (1, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow Dos\ filas\ iguales \Rightarrow V = 0 \Rightarrow Son\ coplanarios$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (2, 4, 2) - (0, 6, 4) = (2, -2, -2) \equiv (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (2, 3, 1) - (2, 4, 2) = (0, -1, -1) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (1, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow Es\ un\ paralelogramo$$

b) El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 4) - (0, 5, 3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 4, 2) - (0, 5, 3) = (2, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} = 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u^2$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

c) Sera una recta perpendicular al plano, cuyo vector directos se halla como el producto vectorial de los vectores AB y AC y que pase por el punto P punto medio de AC por ejemplo (o BD)

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2\,,-1\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{j} - 2\overrightarrow{k} = (0\,,2\,,-2) \equiv (0\,,1\,,-1) \\ \begin{cases} x_P = \dfrac{0+2}{2} = 1 \\ y_P = \dfrac{5+4}{2} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow P\left(1\,,\dfrac{9}{2}\,,\dfrac{5}{2}\right) \\ z_P = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{9}{2} + \lambda \\ z = \dfrac{5}{2} - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine el polinomio f(x), sabiendo que f'''(x) = 12, para todo $x \in \Re$ y además verifica: f(1) = 3 ; f'(1) = 1 ; f''(1) = 4.

b) (1 punto) Determine el polinomio g(x), sabiendo que g''(x) = 6, para todo $x \in \Re$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5 \quad , \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

$a)$

$$f''(x) = \int 12\,dx = 12x + C \Rightarrow f''(1) = 4 \Rightarrow 12\cdot 1 + C = 4 \Rightarrow C = -8 \Rightarrow f''(x) = 12x - 8$$

$$f'(x) = \int (12x-8)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 12x^2 - 8x + K \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow 6\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + K = 1 \Rightarrow K = 3 \Rightarrow f''(x) = 6x^2 - 8x + 3$$

$$f(x) = \int (6x^2 - 8x + 3)\,dx = \frac{1}{3}\cdot 6x^3 - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot x^2 + 3x + Q \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow 2\cdot 1^3 - 4\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + Q = 3 \Rightarrow Q = 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

$b)$

$$g'(x) = \int 6\,dx = 6x + C \Rightarrow g(x) = \int (6x + C)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot x^2 + Cx + K = 3x^2 + Cx + K$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (3x^2 + Cx + K)\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot 3x^3 + \frac{1}{2}\cdot Cx^2 + Kx\right]_0^1 = \left(1^3 + \frac{1}{2}\cdot C\cdot 1^2 + K\cdot 1\right) - \left(0^3 + \frac{1}{2}\cdot C\cdot 0^2 + K\cdot 0\right) = 1 + \frac{C}{2} + K \\ \displaystyle\int_0^2 (3x^2 + Cx + K)\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot 3x^3 + \frac{1}{2}\cdot Cx^2 + Kx\right]_0^2 = \left(2^3 + \frac{1}{2}\cdot C\cdot 2^2 + K\cdot 2\right) - \left(0^3 + \frac{1}{2}\cdot C\cdot 0^2 + K\cdot 0\right) = 8 + 2C + 2K \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 5 \Rightarrow 1 + \frac{C}{2} + K = 5 \Rightarrow 2 + C + 2K = 10 \Rightarrow C + 2K = 8 \\ \displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = 14 \Rightarrow 8 + 2C + 2K = 14 \Rightarrow 2C + 2K = 6 \Rightarrow C + K = 3 \end{cases} \Rightarrow K = 5 \Rightarrow C + 5 = 3 \Rightarrow C = -2 \Rightarrow$$

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Estudie la continuidad y la derivabilidad en **x = 0** y en **x = 1** de $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ |x\ln x| & si \quad x>0 \end{cases}$, donde **ln** denota el logaritmo neperiano.

$$|x\ln x|>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \Rightarrow x>e^0 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le 0 \\ -x\ln x & si \quad 0<x<1 \Rightarrow \\ x\ln x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-x\ln x=-0\cdot(-\infty)=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\infty}{-\dfrac{1}{0}}=-\dfrac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases}$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ \ en\ x=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ -\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot(-x) & si \quad x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ -(\ln x+1) & si \quad 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-(\ln x+1)=-(-\infty)=\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)\ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) \Rightarrow No\ es\ derivable\ \ en\ x=0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-x\ln x=-1\cdot\ln 1=0 \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\cdot\ln 1=0 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ \ en\ x=1$$

$$f'(x)=\begin{cases} -(\ln x+1) & si \quad 0<x<1 \\ \ln x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-(\ln 1+1)=-(0+1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\ln 1+1=0+1=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)\ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) \Rightarrow No\ es\ derivable\ \ en\ x=1$$