

## MATEMÁTICAS II

### TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = 6x - x^2$  y  $g(x) = |x^2 - 2x|$ .

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$  y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

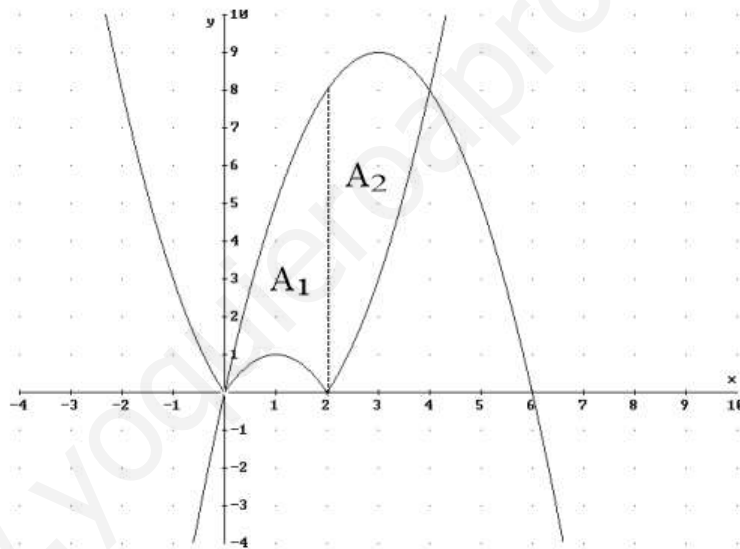
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función  $f(x) = 6x - x^2$  que es una parábola, calculando el vértice y haciendo una

tabla de valores. Abrimos la función  $g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  y hacemos el

dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el  $(0,0)$  y  $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^2 [(6x - x^2) - (-x^2 + 2x)] dx + \int_2^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \\ &= \int_0^2 4x dx + \int_2^4 (-2x^2 + 8x) dx = [2x^2]_0^2 + \left[ -\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = 8 + \left( -\frac{128}{3} + 64 \right) - \left( -\frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{56}{3} u^2 \end{aligned}$$

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = 3 - x^2$  y  $g(x) = -\frac{x^2}{4}$ .

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x=1$  y comprueba que también es tangente a la gráfica de  $g$ . Determina el punto de tangencia con la gráfica de  $g$ .

b) Esboza el recinto limitado por la recta  $y = 4 - 2x$  y las gráficas de  $f$  y  $g$ . Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

En el examen original había un error. Las gráficas estaban cambiadas, es decir,  $f$  era  $g$  y  $g$  era  $f$ .

### R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la tangente es  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Calculamos:  $f(1) = 3 - 1^2 = 2$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

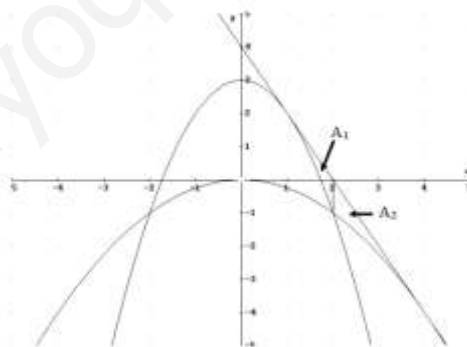
Sustituimos y calculamos la tangente:  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$

Comprobamos que también es tangente a  $g$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\frac{x^2}{4} \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -2x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Luego, es tangente y el punto de tangencia es  $(4, -4)$ .

b) Hacemos el dibujo de las dos parábolas y la recta.



Los puntos de corte son:  $(1, 2)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-2, -1)$  y  $(4, -4)$

c) Calculamos el área que nos piden.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_1^2 [(-2x + 4) - (3 - x^2)] dx + \int_2^4 [(-2x + 4) - \left(-\frac{x^2}{4}\right)] dx = \\ &= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 = \\ &= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + \left(\frac{64}{12} - 16 + 16\right) - \left(\frac{8}{12} - 4 + 8\right) = 1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = e^{2-x}$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , el eje de ordenadas y la recta  $x + y = 3$ .

c) Calcula el área del recinto indicado.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## RESOLUCIÓN

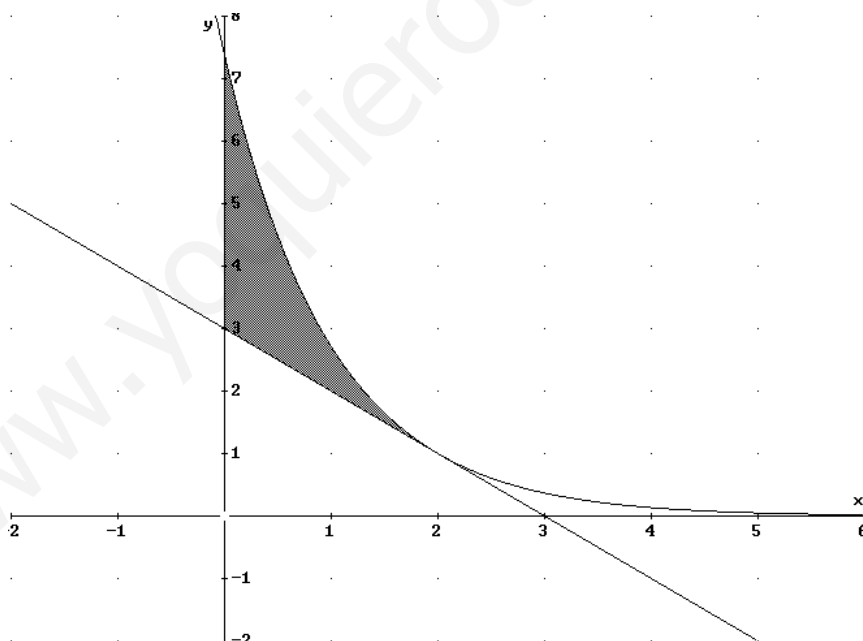
a) La ecuación de la recta tangente será  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$- f(2) = e^0 = 1$$

$$- f'(x) = -e^{2-x} \Rightarrow f'(2) = -e^0 = -1$$

Sustituyendo, tenemos que:  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$

b) Dibujamos el recinto que nos dicen.



c) Calculamos el área del recinto

$$\int_0^2 [(e^{2-x}) - (-x + 3)] dx = \int_0^2 (e^{2-x} + x - 3) dx = \left[ -e^{2-x} + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^2 = (-e^0 + 2 - 6) - (-e^2) = e^2 - 5 \text{ u}^2$$

Considera la función  $f : \left(-\frac{e}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \ln(2x+e)$ , donde  $\ln$  denota logaritmo neperiano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de  $f$  calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

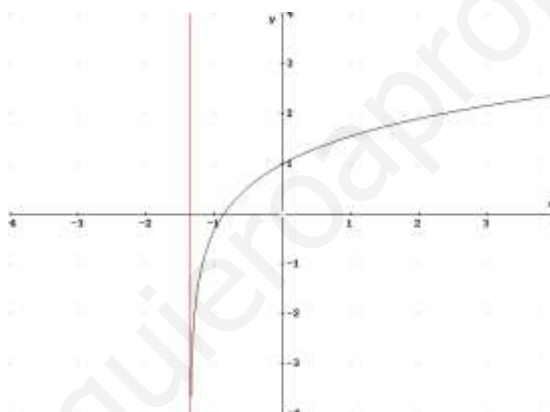
### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Corte con el eje X} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \ln(2x+e) = 0 \Rightarrow e^0 = 2x+e \Rightarrow x = \frac{1-e}{2}$$

$$\text{Corte con el eje Y} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \ln e \Rightarrow y = 1$$

La recta  $x = \frac{-e}{2}$  es una asíntota vertical, ya que  $\lim_{x \rightarrow -\frac{e}{2}} \ln(2x+e) = -\infty$



b) Calculamos la integral  $\int \ln(2x+e) dx$  que es por partes.

$$\begin{aligned} u &= \ln(2x+e); & du &= \frac{2}{2x+e} dx \\ dv &= dx & ; & v = x \end{aligned}$$

$$\int \ln(2x+e) dx = x \cdot \ln(2x+e) - \int \frac{2x}{2x+e} dx$$

La integral que sale es racional, dividimos y la hacemos

$$\begin{aligned} \int \ln(2x+e) dx &= x \cdot \ln(2x+e) - \int \frac{2x}{2x+e} dx = x \cdot \ln(2x+e) - \int \left(1 - \frac{e}{2x+e}\right) dx = \\ &= x \cdot \ln(2x+e) - \int dx + \frac{e}{2} \int \frac{2}{2x+e} dx = x \cdot \ln(2x+e) - x + \frac{e}{2} \ln(2x+e) + C \end{aligned}$$

Calculamos el área que nos piden.

$$\int_{\frac{1-e}{2}}^0 \ln(2x+e) dx = \left[ x \cdot \ln(2x+e) - x + \frac{e}{2} \ln(2x+e) \right]_{\frac{1-e}{2}}^0 = \frac{e}{2} - \frac{-1+e}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

Determina la función  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sabiendo que  $f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$  es  $y = x + 2$ .  
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos  $f'(x)$

$$f'(x) = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{-1}{(x-1)} + C$$

Calculamos  $f(x)$

$$f(x) = \int \left( \frac{-1}{(x-1)} + C \right) dx = -\ln|x-1| + Cx + D$$

La recta tangente en el punto  $x = 2$  tiene de pendiente 1, es decir, que  $f'(2) = 1$ , luego:

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)} + C = 1 \Rightarrow C = 2$$

En el punto  $x = 2$ , la recta tangente y la función coinciden, es decir, que  $f(2) = 4$ , luego:

$$f(2) = -\ln|2-1| + 2 \cdot 2 + D = 4 \Rightarrow D = 0$$

Luego, la función que nos piden es:  $f(x) = -\ln|x-1| + 2x$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .

a) Calcula  $\int f(x) dx$

b) Encuentra la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(0,1)$ .

**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral  $I = \int x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ , que es una integral por partes.

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \cos\frac{x}{2} dx; \quad v = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$F(x) = \int x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} - 2 \int \operatorname{sen}\frac{x}{2} dx = 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 4 \cos\frac{x}{2} + C$$

Calculamos la constante:

$$F(0) = 1 \Rightarrow 2 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen}0 + 4 \cos0 + C = 1 \Rightarrow C = 1 - 4 = -3$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$F(x) = 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 4 \cos\frac{x}{2} - 3$$

Siendo  $a > 1$ , considera el rectángulo de vértices  $A(1,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(a,1)$  y  $D(a,0)$ . La gráfica de la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  para  $x \neq 0$  divide al rectángulo anterior en dos recintos.

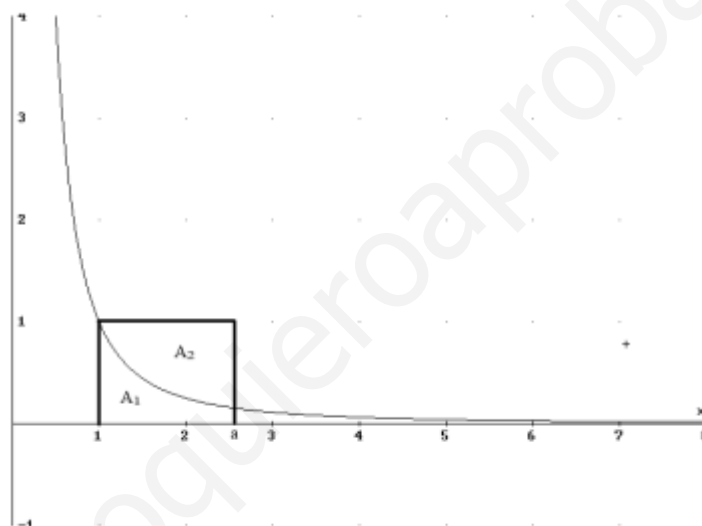
a) Haz un esbozo de la gráfica de  $f$  y del rectángulo descrito.

b) Determina el valor de  $a$  para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

El área del primer recinto es:

$$A_1 = \int_1^a \left( \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^a = \left( -\frac{1}{a} \right) - (-1) = -\frac{1}{a} + 1 \quad u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2 = (a-1) + \frac{1}{a} - 1 = a + \frac{1}{a} - 2 \quad u^2$$

Igualando las dos áreas tenemos que:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow -\frac{1}{a} + 1 = a + \frac{1}{a} - 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2 ; a = 1$$

Luego, el valor que nos piden es  $a = 2$ , ya que  $a > 1$



Calcula  $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx$  donde  $\ln$  denota logaritmo neperiano (sugerencia  $t = e^x$ ).

**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral indefinida con el cambio que nos dicen:  $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{(1+t) \cdot t} dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+t) \cdot t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{A \cdot t + B(1+t)}{(1+t) \cdot t}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t = -1 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1$$

$$t = 0 \Rightarrow 1 = B$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{(1+t) \cdot t} dt = \int \frac{-1}{1+t} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\ln|1+t| + \ln|t| + C = -\ln|1+e^x| + \ln|e^x| + C$$

Calculamos la integral definida que nos pedían

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = \left[ -\ln|1+e^x| + \ln|e^x| \right]_0^{\ln 2} = [-\ln 3 + \ln 2] - [-\ln 2 + \ln 1] = 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = -x^2 - x + 3$  y  $g(x) = |x|$ .

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$  y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

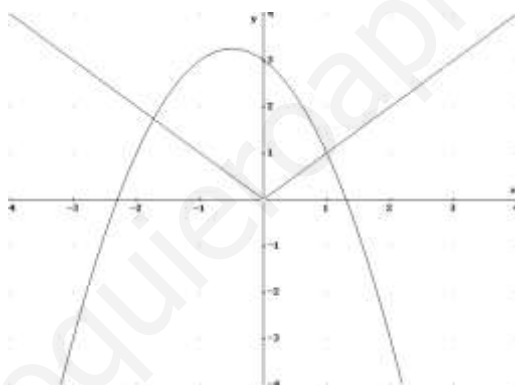
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) La función  $f(x) = -x^2 - x + 3$  es una parábola cuyo vértice está en el punto  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$  y corta al eje X en los puntos  $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$  y  $\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ .

La función  $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3º cuadrante.



Calculamos los puntos de corte de las gráficas.

$$-x^2 - x + 3 = x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -3 . \text{ Sólo sirve } x = 1$$

$$-x^2 - x + 3 = -x \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3} . \text{ Sólo sirve } x = -\sqrt{3}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{3}}^0 [(-x^2 - x + 3) - (-x)] dx + \int_0^1 [(-x^2 - x + 3) - (x)] dx = \int_{-\sqrt{3}}^0 (-x^2 + 3) dx + \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-\sqrt{3}}^0 + \left[ -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_0^1 = -\left( \frac{3\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3} \right) + \left( -\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = 2\sqrt{3} + \frac{5}{3} = 5'13 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Se sabe que la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$  es continua.

a) Determina  $a$ .

b) Para  $a = 8$ , calcula  $\int_0^{10} f(x) dx$

**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### RESOLUCIÓN

$$a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x^2 - 32}{x - 4} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow a = 8$$

$$b) \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 \sqrt{8x} dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} dx$$

$$I_1 = \int_0^8 \sqrt{8x} dx = \sqrt{8} \int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{8} \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^8 = \frac{128}{3}$$

$$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} dx$$

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int \frac{x^2 - 32}{x - 4} dx = \int (x + 4) dx + \int \frac{-16}{x - 4} dx = \frac{x^2}{2} + 4x - 16 \ln |x - 4|$$

$$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 4x - 16 \ln |x - 4| \right]_8^{10} = [(50 + 40 - 16 \ln 6) - (32 + 32 - 16 \ln 4)] = 26 - 16 \ln \frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 \sqrt{8x} dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} dx = \frac{128}{3} + 26 - 16 \ln \frac{3}{2} = \frac{206}{3} - 16 \ln \frac{3}{2}$$

Considera la función  $f$  definida por  $f(x) = ax \ln(x) - bx$  para  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano). Determina  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f$  tiene un extremo relativo en  $x = 1$  y que

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9$$

**MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función:  $f'(x) = a \ln(x) + a - b$

Extremo relativo en  $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Vamos a calcular la integral  $I = \int (ax \cdot \ln x - ax) dx$ , que es una integral por partes.

$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$ $dv = ax dx; \quad v = \frac{ax^2}{2}$
---

$$I = \int (ax \cdot \ln x - ax) dx = \frac{ax^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int ax dx - \frac{ax^2}{2} = \frac{ax^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \left( \frac{ax^2}{2} \right) - \frac{ax^2}{2} = \frac{ax^2}{2} \cdot \ln x - \frac{3ax^2}{4}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[ \frac{ax^2 \ln x}{2} - \frac{3ax^2}{4} \right]_1^2 = \left[ \frac{4a \ln 2}{2} - \frac{12a}{4} \right] - \left[ -\frac{3a}{4} \right] = \frac{4a \ln 2}{2} - \frac{9a}{4} = 8 \ln(2) - 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a \ln 2 - \frac{9a}{4} = 8 \ln 2 - 9 \Rightarrow a = 4$$

Luego,  $a = b = 4$

Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^{-2x}$ .

- Determina el punto de la gráfica de  $f$  en el que la recta tangente es  $y = -2ex$ .
- Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $y = -2ex$  y el eje de ordenadas.
- Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

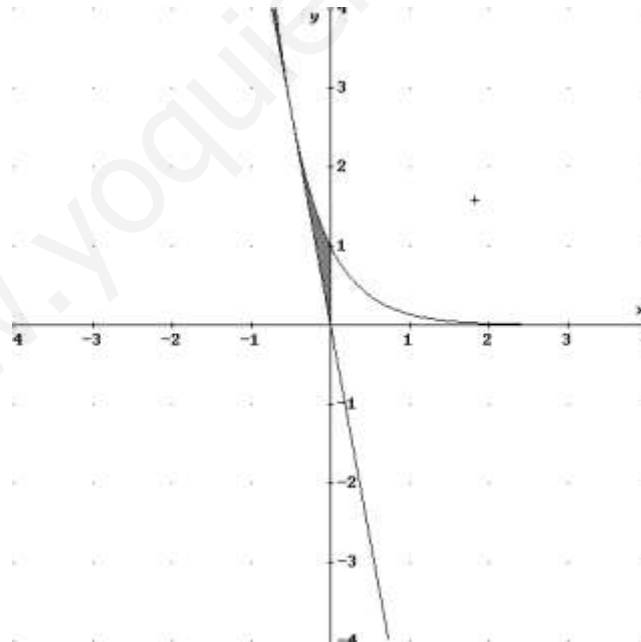
### R E S O L U C I Ó N

- a) La pendiente de la recta tangente es  $-2e$ . Calculamos la derivada de la función y la igualamos a  $-2e$

$$f'(x) = -2e^{-2x} = -2e \Rightarrow e^{-2x} = e \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Luego, el punto es:  $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$

- b) Hacemos el dibujo



- c) Calculamos el área del recinto:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (e^{-2x} + 2ex) dx = \left[ -\frac{e^{-2x}}{2} + ex^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \left( -\frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{e}{2} + \frac{e}{4} \right) = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} u^2$$