

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

www.yoquieroaprobar.es

Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si no es extremo relativo, será un punto de inflexión, luego: $f''(1) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -3 ; b = 3 ; c = 0$$

Luego la función es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es derivable.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable, también es continua. Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{kx} \right) = \frac{2}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2 ; k = 1$$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{kx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

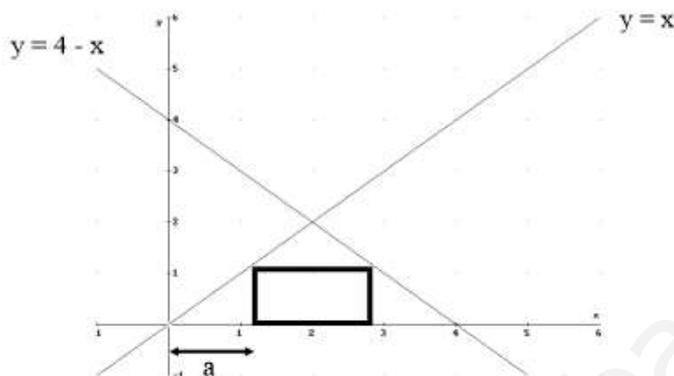
Y como es derivable, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -2k \\ f'(1^+) = -\frac{2}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -2k = -\frac{2}{k} \Rightarrow k = \pm 1$$

Luego, el único valor posible es $k=1$:

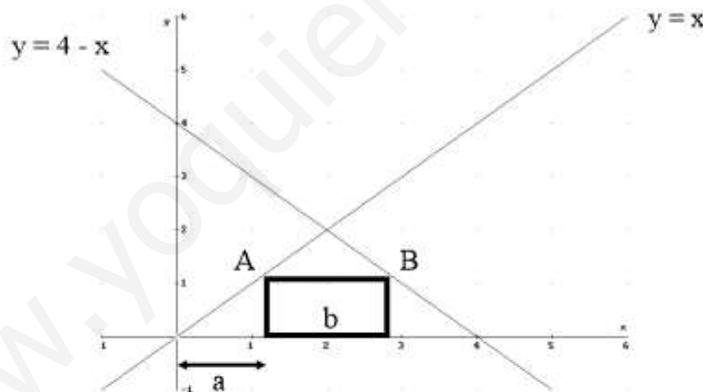
Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:

- Halla la altura del rectángulo en función de a (ver figura).
- Halla la base del rectángulo en función de a .
- Encuentra el valor de a que hace máximo el área del rectángulo.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



- El vértice A tiene de coordenadas (a, a) , ya que es un punto de la recta $y = x$. Por lo tanto, la altura del rectángulo es a .
- El vértice B tiene de coordenadas $(b + a, a)$, y como es un punto de la recta $y = 4 - x$, se cumple que: $a = 4 - (b + a) \Rightarrow b = 4 - 2a$.

c) La función que queremos que sea máximo es: $S_{\max} = (4 - 2a) \cdot a = 4a - 2a^2$

Derivamos e igualamos a cero: $S'_{\max} = 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1$

Luego, el área es máxima cuando $a = 1$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y en $x=1$.

b) Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Primero estudiamos la continuidad de la función.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -xe^{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{x-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} xe^{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} xe^{1-x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(-1-x) & \text{si } x < 0 \\ e^{x-1}(1+x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{1-x}(1-x) & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \\ f'(0^+) = e^{-1} \cdot (1) = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = e^0 \cdot 2 = 2 \\ f'(1^+) = e^0 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b) Calculamos las asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{x-1} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal}$$

en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal en}$$

$+\infty$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza su máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Continua en $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + bx + c &= c \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen } x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 2$$

Máximo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$

La recta tangente a f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2 $\Rightarrow f'(-2) = 2 \Rightarrow -4a + b = 2$.

Resolviendo el sistema $\left. \begin{aligned} -2a + b &= 0 \\ -4a + b &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1 ; b = -2$

Luego, $a = -1 ; b = -2 ; c = 2$

Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

- Extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0$

- Extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale que: $a = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$

b) Calculamos la segunda derivada: $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 2b = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$

$$f''(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo}$$

$$f''(2) = \frac{2}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo}$$