

Ejercicio 1.- Deducir y memorizar las razones trigonométricas de los ángulos de:

$$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, \text{ y } 360^\circ.$$

Ejercicio 2.- Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en grados:

$$30^\circ, 45^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 330^\circ, \text{ y } 1^\circ.$$

Ejercicio 3.- Expresar en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad}, \frac{5\pi}{3} \text{ rad}, \frac{3\pi}{2} \text{ rad}, \frac{4\pi}{3} \text{ rad}, \text{ y } 1 \text{ rad}$$

Ejercicio 4.- Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360° :

$$720^\circ, 900^\circ, -3000^\circ, \text{ y } 13\pi \text{ rad}$$

Ejercicio 5.- Calcular las restantes razones trigonométricas, en cada caso, sabiendo:

- a) $\cos \alpha = 4/5, \quad 270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
- b) $\operatorname{sen} \alpha = -1/2, \quad 3\pi/2 \text{ rad} \leq \alpha \leq 2\pi \text{ rad}$
- c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \quad \pi \text{ rad} \leq \alpha \leq 3\pi/2 \text{ rad}$
- d) $\operatorname{sec} \alpha = -2, \quad 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
- e) $\operatorname{cosec} \alpha = -2, \quad 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$
- f) $\operatorname{cotg} \alpha = -5, \quad \pi/2 \text{ rad} \leq \alpha \leq \pi \text{ rad}$

Ejercicio 6.- Simplificar las siguientes expresiones:

$$a) \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \quad b) \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} \quad c) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

Ejercicio 7.- Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

$$a) \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \quad b) \frac{1 - \operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1 + \operatorname{sen} a} \quad c) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{cotg} a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos^2 a}$$

Ejercicio 8.- Expresar las siguientes razones trigonométricas en función de un ángulo del primer cuadrante:

$$a) \operatorname{sen}(-120^\circ) \quad b) \cos(-30^\circ) \quad c) \operatorname{cosec}(4420^\circ) \quad d) \operatorname{cotg}(-150^\circ)$$

Ejercicio 9.- Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}, 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, hallar las siguientes razones trigonométricas:

$$a) \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \quad b) \cos(180^\circ - \alpha) \quad c) \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) \\ d) \operatorname{cotg}(90^\circ + \alpha) \quad e) \operatorname{sec}(270^\circ - \alpha) \quad f) \operatorname{cosec}(-\alpha)$$

Ejercicio 10.- Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$, hallar las siguientes razones trigonométricas:

$$a) \operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha) \quad b) \operatorname{cotg}(\pi + \alpha) \quad c) \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) \quad d) \cos(90^\circ + \alpha) \quad e) \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) \\ f) \operatorname{sec}(180^\circ - \alpha) \quad g) \operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) \quad h) \operatorname{sec}(810^\circ + \alpha) \quad i) \cos(-\alpha)$$

Ejercicio 11.- Transformar en sumas las siguientes expresiones:

a) $\cos 2a \cos a$

b) $\cos a \cos 2a \cos 3a$

c) $\cos 6a \cos 2a$

Ejercicio 12.- Transformar en sumas las siguientes expresiones y, luego, calcular sus valores sin calculadora:

a) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

b) $\sin 45^\circ \cos 15^\circ$

Ejercicio 13.- Transformar en producto las siguientes expresiones:

a) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ$

b) $\cos 36^\circ - \cos 14^\circ$

c) $\sin 48^\circ - \sin 12^\circ$

d) $\cos 46^\circ - \cos 44^\circ$

e) $\sin 52^\circ - \cos 8^\circ$

Ejercicio 14.- Transformar en producto las siguientes sumas y diferencias y, luego, calcular sus valores sin calculadora:

a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

Ejercicio 15.- Sabiendo que $\sin 25^\circ = 0.4226$, calcular $\sin 50^\circ$.

Ejercicio 16.- Utilizando que $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ y que $15^\circ = 30^\circ/2$, calcular $\operatorname{tg} 15^\circ$ de dos formas distintas, y comprobar que los resultados coinciden.

Ejercicio 17.- Sabiendo que $\pi/2 \leq a \leq 3\pi/2$ y que $\sin a = \frac{3}{5}$, hallar de forma razonada el seno, el coseno y la tangente del ángulo $2a$.

Ejercicio 18.- Sabiendo que $\cos a = -0.2$ y que $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$, calcular seno, coseno y tangente del ángulo $\frac{a}{2}$.

Ejercicio 19.- Si $\cos a = 0.2$, calcular las razones trigonométricas del ángulo $(\pi/2 - 2a)$, siendo a un ángulo del primer cuadrante.

Ejercicio 20.- Sabiendo que $\sin x = 0.2$, hallar $\sin(3x)$.

Ejercicio 21.- Sabiendo que $\operatorname{tg} a = 3/4$, hallar $\operatorname{tg}(a + 30^\circ)$ y $\operatorname{tg}(45^\circ - a)$.

Ejercicio 22.- Si a la $\operatorname{tg}(a/2)$ le llamamos "t", expresa en función de t el seno, el coseno y la tangente del ángulo a .

Ejercicio 23.- Sabiendo que $\operatorname{tg} a = 2$, calcular el valor de $\sin 4a$.

Ejercicio 24.- Transformar en productos y cocientes la suma y la diferencia de las tangentes de dos ángulos. Aplicar los resultados obtenidos para calcular $\operatorname{tg} 75^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ$ y también $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ$.

Ejercicio 25.- Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a}$

b) $\frac{\sin 4a + \sin 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$

c) $\frac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{tg} a}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a} - \sec 2a$

d) $\frac{\sin 2a \cos a}{(1 + \cos 2a)(1 - \cos a)}$

e) $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} + a\right)$

Ejercicio 26.- Simplificar las siguientes expresiones:

$$a) \frac{\operatorname{sen} a (\cos b + \operatorname{sen} a) + \cos a (\operatorname{sen} b + \cos a) - 1}{\cos b (\cos a + \cos b) + \operatorname{sen} b (\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a) - 1}$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos a \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 a)}{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

$$c) \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) - \cos\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 \cdot (1 + \operatorname{sen} a)}{\operatorname{sen}(2a)}$$

$$d) \frac{\operatorname{sen}(2a)}{1 - \cos^2 a} \cdot \frac{1 - \cos a}{\cos a}$$

$$e) \operatorname{sen}^4 a - \cos^4 a$$

Ejercicio 27.- Demostrar las siguientes igualdades:

$$a) \frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(3a) - \operatorname{sen} a} = 1 + 2 \cos(2a)$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} \cdot \frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$c) \frac{2 \operatorname{sen} a}{\operatorname{tg}(2a)} = \cos a - \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos a}$$

$$d) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \operatorname{tg}(2a)$$

$$e) \frac{2 \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(2a)}{2 \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(2a)} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$f) \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \operatorname{tg} b$$

Ejercicio 28.- Demostrar que cualesquiera que sean los ángulos α , β y γ se verifica:

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(\beta - \gamma) + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \operatorname{sen} \gamma \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0$$

Ejercicio 29.- Si α , β y γ son los tres ángulos de un triángulo, demostrar la siguiente igualdad:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

Ejercicio 30.- Si α , β y γ son los tres ángulos de un triángulo, demostrar que:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma = 0$$

Ejercicio 31.- Si α , β y γ son los tres ángulos de un triángulo, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma}{2 \cos \alpha} = \cos \beta$$

Ejercicio 32.- Demostrar que si $\alpha + \beta = \pi/2$ entonces se verifica:

$$(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) \cdot (\cos \alpha + \cos \beta) = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$$

Ejercicio 33.- Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos(5x) - \cos x = 0$

b) $\sin(2x) = \cos x$

c) $-3 \sin x + \cos^2 x = 3$

d) $\cos(2x) - \cos(6x) = \sin(5x) + \sin(3x)$

e) $\cos(4x) + \cos(2x) = \cos x$

f) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

g) $\sin(3x) + \cos(3x) = \sqrt{2}$

h) $\sin(2x) \cos x = 3 \sin^2 x$

i) $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$

Ejercicio 34.- Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \sin x$

b) $\cos^2(x + \pi/6) - \sin^2(x + \pi/6) = 1$

c) $\sin(2x + 40^\circ) + \sin(x + 20^\circ) = 0$

d) $\cos 2x = 1 + 4 \sin x$

e) $4 \cos x \sin x + 2 \sin x - 2 \cos x - 1 = 0$

f) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$

Ejercicio 35.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones pertenecientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 3/4 \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1/4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = 1 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

Ejercicio 36.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin(x+y) - \cos x \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sqrt{2} \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin \cos y = 3/4 \\ \cos x \sin y = 1/4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sin x \sin y = 1 \\ 2x + 2y = 180^\circ \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 3/2 \\ \cos \frac{x-y}{2} = \sqrt{3}/2 \end{cases}$

Ejercicio 37.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos.

1.- $a = 5m, \alpha = 37^\circ$

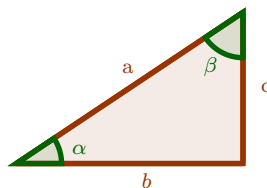
2.- $b = 6m, c = 5m$

3.- $\alpha = 40^\circ 40', c = 5m$

4.- $b = 6m, \beta = 49^\circ$

5.- $a = 8m, b = 3m$

6.- $\beta = 37^\circ 33', c = 4m$



Ejercicio 38.- Las diagonales de un rombo miden 30 cm y 10 cm, respectivamente. ¿Cuánto miden sus ángulos?

Ejercicio 39.- Determinar la altura y la base de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 38 cm y que ésta forma un ángulo de 30° con la base.

Ejercicio 40.- Determinar el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 8 m de radio.

Ejercicio 41.- Calcular la altura de una chimenea, sabiendo que la visual dirigida a su punto más alto por un observador forma un ángulo de $36^\circ 40'$ con la horizontal. El observador toma la medida del ángulo a 1'80 m de altura y se encuentra situado en el suelo a 48 m de distancia del pie de la chimenea.

Ejercicio 42.- Calcular el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 6m de radio.

Ejercicio 43.- Situados a cierta distancia del pie de una torre, el ángulo bajo el que se ve, mirando desde el suelo, es de 50° . ¿Bajo qué ángulo se verá situándose a triple distancia?

Ejercicio 44.- Hallar la altura de un edificio sabiendo que desde dos puntos alineados con la base, y distantes entre si 80 m, se ve bajo ángulos de 60° y 45° , respectivamente.

Ejercicio 45.- La altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles mide 12cm y el ángulo desigual del triángulo es de 30° . Hallar sus otros dos ángulos, sus lados, su perímetro y su área.

Ejercicio 46.- Calcular el volumen de un cono, sabiendo que el radio de la base es de 5 cm y el ángulo que forman en el vértice dos aristas opuestas (ángulo cónico) es de 72° . (Volumen del cono: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$).

Ejercicio 47.- Se traza una tangente exterior a dos circunferencias de 10 y 20 cm de radio, y 48 cm de distancia entre sus centros. Calcular la longitud del segmento que une los puntos de contacto.

Ejercicio 48.- Calcular la longitud de una correa plana que une exteriormente dos poleas de 24 y 12cm de radio, cuyos centros se encuentran a 54cm de distancia.

Ejercicio 49.- Tres amigos van a escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación que mide 30° . Han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación siendo ahora de 45° . Calcular la altura de la montaña.

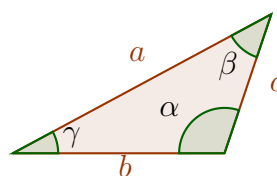
Ejercicio 50.- Dos individuos A y B observan un globo que está situado entre ellos en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los individuos es de 4 Km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 46° y 52° , respectivamente. Hallar la altura del globo y su distancia a cada observador.

Ejercicio 51.- Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17° . Aproximándose 25.9m hacia la orilla del río, en la dirección del árbol, el ángulo es de 31° . Calcular la altura del árbol.

Ejercicio 52.- Una escalera de bomberos de 10 m de longitud, se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo de 45° con el suelo, y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo con el suelo de 30° . Calcula la altura de las fachadas y la anchura de la calle.

Ejercicio 53.- Resolver los siguientes triángulos (calculando su área):

- $\alpha = 49^\circ 38'$ $\beta = 70^\circ 21'$ $b = 22.94\text{cm}$
- $\beta = 45^\circ$ $\gamma = 105^\circ$ $a = 6\text{m}$
- $a = 10\text{m}$ $b = 7\text{m}$ $\gamma = 30^\circ$
- $b = 10\text{m}$ $c = 8\text{m}$ $\alpha = 45^\circ$
- $a = 15\text{m}$ $b = 22\text{m}$ $c = 17\text{m}$
- $a = 3\text{cm}$ $b = 6\text{cm}$ $c = 4\text{cm}$
- $c = \sqrt{2}\text{m}$ $\beta = 75^\circ$ $\alpha = 60^\circ$



- Ejercicio 54.-** ¿Sería posible que un triángulo tenga lados que midan $a = 7m$, $b = 15m$ y $c = 5m$?
- Ejercicio 55.-** Resolver un triángulo del que se conocen los lados: $a = 10cm$, $b = 18cm$ y $c = 6cm$. Interpretar el resultado.
- Ejercicio 56.-** Resolver un triángulo del que se conocen los siguientes datos: $\gamma = 30^\circ$, $b = 5\sqrt{2}m$ y $c = 5m$. Interpretar los resultados obtenidos.
- Ejercicio 57.-** Resolver si es posible, e interpretar el resultado, el triángulo de datos: $a = 52cm$, $b = 32cm$ y $\beta = 40^\circ 30'$
- Ejercicio 58.-** Resolver el triángulo de datos: $\alpha = 30^\circ$, $a = 3m$ y $b = 6m$.
- Ejercicio 59.-** Resolver el triángulo de datos: $\alpha = 60^\circ$, $a = 8m$ y $b = 4m$.
- Ejercicio 60.-** Juan y Rosa se encuentran a ambos lados de la orilla de un río. Rosa (que se encuentra en un punto A) se aleja, hasta una caseta distante 100 metros del punto A , desde la que dirige visuales a los puntos A y B (en el que se encuentra Juan), que forman un ángulo de 30° ; y al volver al punto A ve los puntos B y C (caseta) bajo un ángulo de 120° . ¿Qué distancia hay entre Juan y Rosa?
- Ejercicio 61.-** Dos montañeros que han subido en fines de semana sucesivos a dos picos querían saber qué distancia hay entre dichos picos. Para ello han medido desde la base (A') del pico A los ángulos $\widehat{AA'B} = 85^\circ$ y $\widehat{BA'B'} = 30^\circ$, donde B' es la base del pico B . Después han caminado hasta la base B' del pico B y han medido los ángulos $\widehat{AB'B} = 93^\circ$ y $\widehat{A'B'A} = 40^\circ$. La distancia que hay entre dichas bases es de 600 metros. ¿Podrías calcular la distancia entre los dos picos?
- Ejercicio 62.-** Desde un lado de un barranco queremos medir la distancia entre los puntos A y B situados en el otro lado. Para ello, desde el punto C , situado en nuestro lado, medimos los ángulos $\widehat{ACB} = 30^\circ$ y $\widehat{ACD} = 75^\circ$. Asimismo, desde otro punto D de nuestro lado, distante 50 metros de C , medimos los ángulos $\widehat{ADC} = 25^\circ$ y $\widehat{BDC} = 85^\circ$. ¿Cuál es la distancia entre A y B ?
- Ejercicio 63.-** La resultante de dos fuerzas de 9 N y 12 N forma con la menor de ellas un ángulo de 45° . Hallar el módulo de dicha resultante.
- Ejercicio 64.-** Uno de los ángulos (\widehat{C}) de un triángulo mide 60° . Calcular los otros dos ángulos (\widehat{A} y \widehat{B}) del mismo, sabiendo que $\widehat{\sin A} + \widehat{\sin B} = \frac{3}{2}$.
- Ejercicio 65.-** Uno de los lados de un triángulo es doble del otro, y el ángulo comprendido es de 60° . Hallar los otros dos ángulos.
- Ejercicio 66.-** Situados en el suelo se quiere medir la altura de una torre. Desde un punto A del suelo se observa el punto P , más alto de la torre, con un ángulo de elevación de 61° . El observador gira sobre sí mismo 23° , y se desplaza 22 metros hasta otro punto B , desde el que observa el punto P con un ángulo de elevación de 76° . Hallar la altura de la torre.
- Ejercicio 67.-** Resolver un triángulo sabiendo que su superficie es de 32 cm^2 y dos de sus ángulos miden 40° y 65° .
- Ejercicio 68.-** El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo mide $2\sqrt{2} \text{ cm}$ y dos de sus ángulos son de 30° y 45° . Resolver dicho triángulo.
- Ejercicio 69.-** La anchura de un campo de fútbol es de 50 m y la de la portería 7 m. ¿Bajo qué ángulo ve la portería un jugador situado en un punto de la banda lateral que está a 20 metros de la línea de fondo?
- Ejercicio 70.-** Las dos orillas de un río son rectas y paralelas. Desde dos puntos situados en una de ellas y separadas entre sí 100 metros se observa un mismo punto de la orilla opuesta bajo visuales de 15° y 30° , respectivamente. Calcular la anchura del río.