1) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$

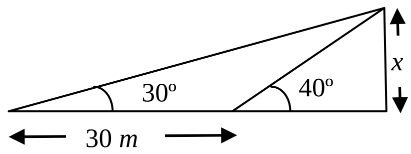
2) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $3^{x-4}+5\cdot 3^x-3^{x+1}=163$

3) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{8}{x^2-1}$

4) Resolver: $\log x^2-\log 3=\log x+\log 5$

5) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2-3x}{x+2}\geq 0$ *(1,5 puntos)*

6) Hallar x en base al gráfico adjunto.



7) Sin calculadora, siendo $\operatorname{cotg}\alpha=-2$, $90º<\alpha<270º$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.

8) Expresar en función de un ángulo del primer cuadrante: tg (–275º) y cos 7770º

9) Demostrar la veracidad de la siguiente identidad: $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$ *(1,5 puntos)*

1 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación**) a) Simplificar al máximo: $\dfrac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}}$

b) Racionalizar: $\dfrac{3}{4-3\sqrt{3}}$

2 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación**) Hallar la suma de 10 términos de $1, x, x^2, ...$

3 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación**) a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora): $9x^2-102x+331x-238$. b) Resolver la ecuación: $9x^2-102x+331x-238=0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

SOLUCIONES

1) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$

Aislamos el sumando que contiene la raíz cuadrada y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1 \Rightarrow \sqrt{x^2-6x+2}=1-2x \Rightarrow (\sqrt{x^2-6x+2})^2=(1-2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-6x+2=1-4x+4x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 6x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2\pm 4}{6} = \left\langle \begin{array}{l} =\frac{-6}{6}=-1 \\ =\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Como siempre que elevamos al cuadrado, hay que comprobar la validez de las soluciones, sustituyendo en la ecuación original:

- $\boxed{x=-1}$: $-2+\sqrt{1+6+2}=-2+3=1$: válida
- $\boxed{x=1/3}$: Sustituimos y realizamos la operación con la calculadora, y resulta ser igualmente válida.

2) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $3^{x-4}+5\cdot 3^x-3^{x+1}=163$

Buscamos que aparezca repetidamente la misma base con el mismo exponente, conteniendo a la incógnita:

$$3^{x-4}+5\cdot 3^x-3^{x+1}=163 \Rightarrow \frac{3^x}{3^4}+5\cdot 3^x-3^x 3=163$$

Hacemos el *cambio de incógnita* $t=3^x$:

$$\frac{t}{81}+5t-3t=163 \Rightarrow \frac{t+405t-243t}{81}=163 \Rightarrow 163t=163\cdot 81 \Rightarrow t=81$$

Deshacemos el *cambio*:

$$3^x=81 \Rightarrow 3^x=3^4 \Rightarrow \boxed{x=4}.$$

3) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{8}{x^2-1}$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)+2(x+1)}{x^2-1}=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow x^2-x+2x+2=8 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left\langle \begin{array}{l} =\frac{-6}{2}=-3 \\ =\frac{4}{2}=2 \end{array}\right.$$

Como ninguna de las dos anula ningún denominador en la ecuación original, ambas son válidas: $\boxed{x=-3 \text{ ó } x=2}$.

4) Resolver: $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$

Sabemos que suelen ser más fáciles las ecuaciones si, en lugar de quitar logaritmos y calculamos el valor de x, averiguamos directamente el valor de $\log x$. Así:

$$\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5 \;\Rightarrow\; 2\log x - \log x = \log 3 + \log 5 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \log x = \log 3\cdot 5 \;\Rightarrow\; \log x = \log 15 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 15}.$$

La solución obtenida es válida porque no hace negativo ni cero ningún argumento de logaritmos en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2-3x}{x+2} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador por separado:

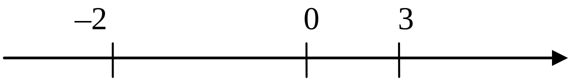
- $x^2 - 3x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = 0 \text{ ó } x = 3}$. La factorización es $x(x-3)$.
- $x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = -2}$. La factorización es $x + 2$.

La inecuación queda así:

$$\frac{x(x-3)}{x+2} \geq 0$$

Eso significa que hay que encontrar los valores de x que hacen que la expresión del primer miembro sea positiva o nula.

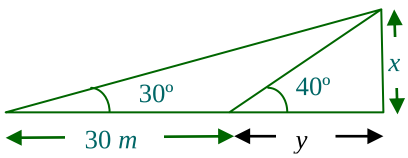
Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas y creamos el siguiente cuadro. En cada uno de los intervalos resultantes, cualquier valor de x que elijamos producirá el mismo signo para cada uno de los factores que participan en la inecuación y, por tanto, en la expresión cuyo signo evaluamos:



	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x + 2$	–	0	+	…	+	…	+
x	–	…	–	0	+	…	+
$x - 3$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x(x-3)}{x+2}$	–	$\nexists$	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Por tanto, la solución son los elementos de: $\boxed{(-2, 0] \cup [3, +\infty)}$

6) Hallar x en base al gráfico adjunto.



Llamando y a la base del triángulo rectángulo más pequeño de la derecha, se tiene, si nos fijamos en dicho triángulo y en el triángulo total (ambos son rectángulos):

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 40^\circ = \dfrac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{x}{30+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 40^\circ \\ x = (30+y)\operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{Igualamos:}$$

$$\Rightarrow\; y \operatorname{tg}40^\circ = (30 + y)\operatorname{tg} 30^\circ \;\Rightarrow\; y \operatorname{tg}40^\circ = 30 \operatorname{tg} 30^\circ + y \operatorname{tg} 30^\circ \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y \operatorname{tg} 40^\circ - y \operatorname{tg} 30^\circ = 30 \operatorname{tg} 30^\circ \;\Rightarrow\; y(\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 30 \operatorname{tg} 30^\circ \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y = \frac{30 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}$$

De donde: $x = y \operatorname{tg} 40^\circ = \dfrac{30 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \operatorname{tg} 40^\circ = \boxed{\dfrac{30 \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \approx 55{,}52\ m}$

7) Sin calculadora, siendo cotg α = – 2, 90º < α < 270º, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.

Como la cotangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

- $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = -\dfrac{1}{2}}$
- $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{4}{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$, negativo por ser del segundo cuadrante.
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \dfrac{-1}{2}\dfrac{-2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}}$
- $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-2/\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$
- $\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{5}/5} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}}$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que tg α = –1/2), que α = – 26,57º. Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -26{,}57^\circ + 180^\circ = 153{,}43^\circ = 153^\circ\ 26'\ 5{,}82''}$

8) Expresar en función de un ángulo del primer cuadrante: tg (–275º) y cos 7770º

- tg (–275º) = tg (–275º + 360º) = $\boxed{\text{tg } 85^\circ}$, pues al dar una vuelta completa estamos en la misma posición inicial sobre la circunferencia.
- cos 7770º = cos 210º = – cos (210º – 180º) = $\boxed{-\cos 30^\circ}$ ya que es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210º es el resto de dividir 7770º entre 360º (son 21 vueltas completas más dicho resto).

9) Demostrar la veracidad de la siguiente identidad: $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$ *(1,5 puntos)*

$$\boxed{\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha}$$

1 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)** a) Simplificar al máximo: $\dfrac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}}$

$$\frac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^8 a}}{a\sqrt{a^2 a}} = \frac{a^2\sqrt[4]{a}}{a\cdot a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a^2}}{a} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}}$$

b) Racionalizar: $\dfrac{3}{4-3\sqrt{3}}$

$$\frac{3}{4-3\sqrt{3}} = \frac{3}{4-3\sqrt{3}}\,\frac{4+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = \frac{3(4+3\sqrt{3})}{4^2-(3\sqrt{3})^2} = \frac{12+9\sqrt{3}}{16-3^2(\sqrt{3})^2} = \frac{12+9\sqrt{3}}{16-27} =$$

$$= \boxed{-\frac{12+9\sqrt{3}}{11}}$$

2 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)** Hallar la suma de 10 términos de 1, x, x^2, ...

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$, $r = x$. Por tanto:

$$s_{10} = \frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1} = \boxed{\frac{x^{10}-1}{x-1}}$$

Aunque damos este resultado final, se podría dividir por Ruffini, resultando una expresión polinómica.

3 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)** a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora): $9x^2 - 102x + 331x - 238$. b) Resolver la ecuación: $9x^2 - 102x + 331x - 238 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

Mediante Ruffini:

	9	–102	331	– 238
1		9	– 93	238
	9	– 93	238	0

Como no encontramos más valores, hallamos las posibles raíces restantes resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$9x^2 - 93x + 238 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{93\pm\sqrt{8649-8568}}{18} = \frac{93\pm 9}{18} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{84}{18} = \dfrac{14}{3} \\ = \dfrac{102}{18} = \dfrac{17}{3} \end{array} \right.$$

Luego: $\boxed{9x^3 - 102x^2 + 331x - 238 = 9(x-1)(x-14/3)(x-17/3)}$

Según lo anterior, las raíces son: $\boxed{1,\ 14/3,\ 17/3}$.