Nombre y Apellidos:

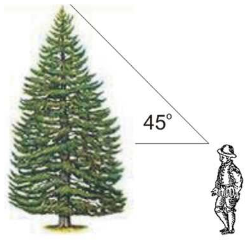
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ejercicio 1º [2,00 puntos]

Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8 metros del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior del mismo con un ángulo de elevación de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de declinación de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado.

Ejercicio 2º [1,50 puntos]

Un hombre a cierta distancia de un árbol observa la copa de dicho árbol bajo un ángulo de 45º respecto a la horizontal. Tras retroceder 4 metros, aumentando la distancia al árbol, la copa la ve con un ángulo de 28º respecto la horizontal. Se pide calcular la altura del árbol con al menos dos decimales de precisión*. Hay que tener en cuenta que el punto de observación del hombre es la altura de sus ojos estando de pie, que estarán a **1,70 metros de altura** (*el hombre medirá unos 180 cm aunque este último dato entre paréntesis es innecesario*)



Posición Inicial

Posición Final

Nota: **Para la precisión de dos decimales se recomienda usar al menos tres decimales en los cálculos intermedios*

Ejercicio 3º [1,50 puntos]

Calcula la forma continua de la ecuación de la recta r sabiendo que pasa por el punto $A(3,5)$ y es paralela a la recta:

$$s:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$$

Ejercicio 4º [1,50 puntos]

Determina la posición relativa de la recta r y la circunferencia c cuyas ecuaciones están a la derecha. ***¡Ojo!****, sólo se pide la posición relativa entre recta y circunferencia.*

$$r:\ x+7y-20=0$$

$$c:\ x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

Ejercicio 5º [1,50 puntos]

Sabiendo que una recta r pasa por el punto $A(3,-2)$ con pendiente $m_r=2$ calcula las formas de la ecuación de la recta r siguientes: General, Continua, Vectorial y Paramétrica

Ejercicio 6º [2,00 puntos: 1,00 por apartado]

Estudia las posiciones relativas de las siguientes parejas de rectas, en caso de ser **secantes** calcular el punto de corte:

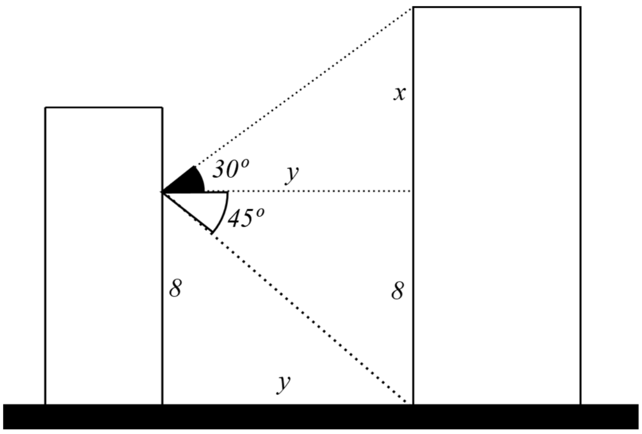
a) $r:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ $\qquad s:\ 4x+6y-5=0$

b) $r:\ y=-3x-2$ $\qquad s:\ 2x+3y-5=0$

Solución

Ejercicio 1º [2,00 puntos]

Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8m del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior del mismo con un ángulo de elevación de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de declinación de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado.



La altura del edificio será $x + 8$

$$\left.\begin{array}{l} \tan 45º = \dfrac{8}{y} \\ \tan 30º = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{8}{\tan 45º} \\ y = \dfrac{x}{\tan 30º} \end{array}\right\}$$

Igualando $y = y$

$$\frac{8}{\tan 45º} = \frac{x}{\tan 30º}$$

$$Multiplico\ \ por\ (\tan 45º)\cdot(\tan 30º)$$

$$8 \cdot \tan 30º = x \cdot \tan 45º$$

$$Divido\ \ entre(\tan 45º)$$

$$\frac{8 \cdot \tan 30º}{\tan 45º} = x$$

Operando en la calculadora:

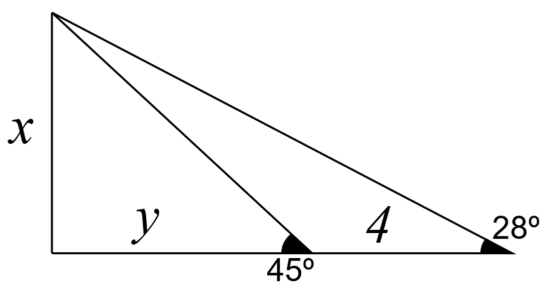
$$x = 4{,}6188021535170061160731902440157$$

RESPUESTA: La altura del edificio será 4,62 metros más los 8 que ya teníamos, luego 12, 62 metros.

Ejercicio 2º [2,00 puntos]

Un hombre a cierta distancia de un árbol observa la copa de dicho árbol bajo un ángulo de 45º respecto a la horizontal. Tras retroceder 4 metros, aumentando la distancia al árbol, la copa la ve con un ángulo de 28º respecto la horizontal. Se pide calcular la altura del árbol con al menos dos decimales de precisión*. Hay que tener en cuenta que el punto de observación del hombre es la altura de sus ojos estando de pie, que estarán a **1,70 metros de altura** (*el hombre medirá unos 180 cm aunque este último dato entre paréntesis es innecesario*)

Nota: **Para la precisión de dos decimales se recomienda usar al menos tres decimales en los cálculos intermedios*



Llamemos x a la altura del árbol menos 1,70 m

$$\left.\begin{array}{l} \tan 45º = \dfrac{x}{y} \\ \tan 28º = \dfrac{x}{y+4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y \cdot \tan 45º = x \\ (y+4)\cdot \tan 28º = x \end{array}\right\}$$

Igualando $x = x$

$$y \cdot \tan 45^\circ = (y+4) \cdot \tan 28^\circ$$
$$y \cdot \tan 45^\circ = y \cdot \tan 28^\circ + 4 \cdot \tan 28^\circ$$
$$y \cdot \tan 45^\circ - y \cdot \tan 28^\circ = 4 \cdot \tan 28^\circ$$
$$y \cdot (\tan 45^\circ - \tan 28^\circ) = 4 \cdot \tan 28^\circ$$
$$y = \frac{4 \cdot \tan 28^\circ}{\tan 45^\circ - \tan 28^\circ}$$

Entonces:

$$x = y \cdot \tan 45^\circ$$
$$x = \frac{4 \cdot \tan 28^\circ}{\tan 45^\circ - \tan 28^\circ} \cdot \tan 45^\circ$$
$$x = 4{,}5417052369682817306177125146108$$

RESPUESTA: La altura del árbol es de 4, 54 metros más los 1,70 metros de altura de ojos, luego 6,24 metros.

<u>Ejercicio 3º [1,50 puntos]</u>

Calcula la forma continua de la ecuación de la recta r sabiendo que pasa por el punto $A(3,5)$ y es paralela a la recta:

$$s: \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

Pasamos la ecuación de la recta s a forma general multiplicando por 6

$$s: 2 \cdot x - 3 \cdot y = 6 \qquad \Rightarrow \qquad 2x - 3y = 6$$

Un vector normal a s será el vector

$$\overrightarrow{n_s} = (2,-3)$$

Luego un vector paralelo a s (luego director de s) será:

$$\overrightarrow{d_s} = (3,2)$$

Ese vector también me sirve como director de la recta r que busco y como se que pasa por punto $A(3,5)$ podemos escribir la ecuación continua de r:

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{2}$$

<u>Ejercicio 4º [1,50 puntos]</u>

Determina la posición relativa de la recta r y la circunferencia c cuyas ecuaciones están a la derecha. *Ojo, sólo se pide la posición relativa entre recta y circunferencia.*

$$r: \quad x + 7y - 20 = 0$$
$$c: \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \\ x + 7y - 20 = 0 \end{array}\right\}$$

<u>Despejamos x en 2ª ecuación:</u>

$$x = -7y + 20$$

<u>Sustituimos x en 1ª ecuación</u>

$$(-7y+20)^2 + y^2 - 4(-7y+20) + 2y - 20 = 0$$
$$49y^2 + 400 - 280y + y^2 + 28y - 80 + 2y - 20 = 0$$
$$50y^2 - 250y + 300 = 0$$
$$\textit{Dividiendo entre } 50$$
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} + = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ - = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Solución 1 (Exacta) $\boxed{y = 3}$ **_Solución 2 (Exacta)_** $\boxed{y = 2}$

Calculo x

- Si $y = 3$ entonces $x = -7 \cdot 3 + 20 = -21 + 20 = -1$ $\Rightarrow Corte\ en\ punto\ (-1,3)$
- Si $y = 2$ entonces $x = -7 \cdot 2 + 20 = -14 + 20 = 6$ $\Rightarrow Corte\ en\ punto\ (6,2)$

Son por lo tanto secantes y se cortan en los puntos $(-1,3)$ y $(6,2)$, aunque esto último no era pedido por el ejercicio, de hecho, en el momento en que al resolver la ecuación de segundo grado hemos visto que había una raíz cuadrada distinta de cero (luego nos darán dos soluciones) ya podíamos haber contestado a la pregunta.

Ejercicio 5º [1,50 puntos]

Sabiendo que una recta r pasa por el punto $A(3,-2)$ con pendiente $m_r = 2$ calcula las formas de la ecuación de la recta r siguientes: General, Continua, Vectorial y Paramétrica

La forma explicita es $y = mx + b$ donde la m es la pendiente que ya conocemos luego $y = 2x + b$

La b es la **ordenada-en-origen** que desconocemos de momento, pero usado el hecho de que pasa por el punto $A(3,-2)$ podemos plantear una ecuación y averiguarlo:

$$Pasa\ por\ A(3,-2) \quad \Rightarrow \quad -2 = 2 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad -2 = 6 + b \quad \Rightarrow -2 - 6 = b \quad \Rightarrow \boxed{-8 = b}$$

Así pues, la ecuación de r en forma explícita nos queda:

$$\boxed{y = 2x - 8} \qquad EXPLÍCITA$$

Pasando todos los términos a un solo miembro obtendremos la forma general de r:

$$\boxed{2x - y - 8 = 0} \qquad GENERAL$$

Separamos los términos en x y los términos en y, el término independiente lo reparto o no, es indiferente:

$$2x - 8 = y$$

Busco dejar ambas variables con coeficiente $+1$. La y ya lo tiene, pero la x tiene un 2 así que en el primer miembro voy a sacar un factor común 2 y despejarlo (dividiendo toda la ecuación entre 2)

$$2(x-4) = y \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \frac{y}{2}$$

De esta forma hemos obtenido la forma continua, aunque para que no hallan dudas escribiremos en rojo los elementos de esta que no se ven (porque matemáticamente no es necesario escribirnos)

$$\boxed{\frac{x-4}{1} = \frac{y-0}{2}} \qquad CONTINUA$$

Aprovechando que vemos que la continua nos da un punto por el que pasa $(4,0)$ y un vector director $(1,2)$ podemos escribir la forma vectorial:

$$\boxed{(x,y) = (4,0) + \lambda \cdot (1,2) \qquad con\ \lambda \in \mathbb{R}} \qquad VECTORIAL$$

Las paramétricas ya son evidentes:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = 4+\lambda \\ y = 2\lambda \end{array}\right\} \quad con\ \lambda \in \mathbb{R}} \qquad PARAMÉTRICAS$$

Ejercicio 6º [2,00 puntos: 1,00 por apartado]

Estudia las posiciones relativas de las siguientes parejas de rectas, en caso de ser **secantes** calcular el punto de corte:

a) $r: \ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ $\qquad s: \ 4x+6y-5=0$ $\qquad$ **b)** $r: \ y=-3x-2$ $\qquad s: \ 2x+3y-5=0$

Apartado A

Pasamos r a forma general (la s ya lo está) ya que comparando los vectores normales de ambas rectas podemos deducir su posición relativa:

$$r: \ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \underset{\substack{Multiplicamos \\ por\ 6}}{\Rightarrow} 2x+3y=6 \quad \Rightarrow 2x+3y-6=0$$

Ahora podemos escribir los vectores normales de ambas rectas y ver si son proporcionales o no:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{n_r}=(2,3) \\ \overrightarrow{n_s}=(4,6) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} (2, & 3) \\ (4, & 6) \end{array} \begin{array}{l} \nearrow 12 \\ \searrow 12 \end{array} \Rightarrow Son\ proporcionales, luego\ \ r \parallel s\ (Paralelas)$$

Apartado B

Pasamos r a forma general (la s ya lo está) ya que comparando los vectores normales de ambas rectas podemos deducir su posición relativa:

$$r: \ y=-3x-2 \qquad \Rightarrow 3x+y+2=0$$

Ahora podemos escribir los vectores normales de ambas rectas y ver si son proporcionales o no:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{n_r}=(3,1) \\ \overrightarrow{n_s}=(2,3) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} (3, & 1) \\ (2, & 3) \end{array} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 9 \end{array} \Rightarrow NO\ SON\ proporcionales, luego\, son\ \text{secantes}$$

Para calcular el punto de corte pedido resolvemos el sistema formado por ambas rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+2=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y=-2 \\ 2x+3y=5 \end{array}\right\}$$

Aplicando reducción:

$$\begin{array}{lrrcr} \xrightarrow{-2} & \cancel{-6x} & -2y & = & +4 \\ \xrightarrow{3} & \cancel{+6x} & +9y & = & +15 \\ \hline & & +7y & = & 19 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrcr} \xrightarrow{-3} & -9x & \cancel{-3y} & = & +6 \\ \xrightarrow{1} & +2x & \cancel{+3y} & = & +5 \\ \hline & -7x & & = & 11 \end{array}$$

$$\text{Dividimos entre } 7 \qquad \boxed{y=\frac{19}{7}}$$

$$\text{Dividimos entre } -7 \qquad x=\frac{11}{-7} \quad \Rightarrow \boxed{x=\frac{-11}{7}}$$

Luego el punto de corte es $\left(\frac{-11}{7},\frac{19}{7}\right)$