

## Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Octubre 2004

---

---

**Problema 1** (4 puntos) Discutir según el valor del parámetro real  $a$  el sistema lineal

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + y + az = 2 \\ -ax - z = -a \end{cases}$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

**Problema 2** (3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de  $k$  para los que la matriz  $A \cdot B$  tiene inversa.
2. Halla los valores de  $k$  para los que la matriz  $B \cdot A$  tiene inversa.

**Problema 3** (3 puntos) Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad.

Calcular lo que tienen cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros.

**Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato**  
**Octubre 2004**

---

---

**Problema 1** (4 puntos) Discutir según el valor del parámetro real  $a$  el sistema lineal

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + y + az = 2 \\ -ax - z = -a \end{cases}$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

**Solución:**

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array} \right)$ .

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de  $A$ :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \implies a = \pm 1$$

- Si  $a \neq \pm 1 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) \implies$  Sistema compatible determinado.

- Para  $a = -1$ :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$

Tenemos que  $|A| = 0$  y además hay un menor  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

y por tanto, el  $\text{Rango}(A) = 2$ .

Ahora estudiamos el rango de  $\bar{A}$ , y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y el } \text{Rango}(\bar{A}) = 3.$$

Concluyendo:

$\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \implies$  El sistema es Incompatible.

• Para  $a = 1$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$

Sabemos que  $|A| = 0$ , luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

En la matriz ampliada  $\bar{A}$  vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz  $A$ .

Como conclusión podemos afirmar que  $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}\bar{A} < n^\circ$  de incógnitas  $\implies$  Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz  $A$  podemos desprejir la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x - z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 2 - z \\ x = 1 - z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 2** (3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de  $k$  para los que la matriz  $A \cdot B$  tiene inversa.
2. Halla los valores de  $k$  para los que la matriz  $B \cdot A$  tiene inversa.

**Solución**

1. Primero calculamos el producto de  $A \cdot B$ :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2 + 2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el determinante:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2 + 2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2 + 2k)) = 0$$

Independientemente del valor de  $k$ , luego  $A \cdot B$  no tiene inversa, sea cual sea el valor de  $k$ .

2. Primero calculamos el producto de  $B \cdot A$ :

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k + 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el determinante:

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k + 2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de  $B \cdot A$ , sea cual sea el valor de  $k$ .

**Problema 3** (3 puntos) Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad.

Calcular lo que tienen cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros.

**Solución:**

Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$  el dinero de Luis, Juan y Óscar, respectivamente.

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} = y + \frac{x}{3} = z \\ x + y + z = 60 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ x + y + z = 60 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 20 \end{cases}$$