Ejercicio. 8.1.
Dados los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d, e\}, \\ B &= \{e, f, g, h\}, \\ C &= \{a, e, i, o, u\} \end{aligned}$$

Determinar los siguientes conjuntos:

$$A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, A \setminus B, A \setminus (B \cup C), (A \cap B) \cup C, C \cap (A \setminus B), B \times C, C \times B, A \times B \times C.$$

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\begin{aligned} &A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}, \\ &A \cap B \cap C = \{e\}, \\ &A \setminus B = \{a, b, c, d\}, \\ &A \setminus (B \cup C) = \{b, c, d\}, \\ &(A \cap B) \cup C = \{a, e, i, o, u\}, \\ &C \cap (A \setminus B) = \{a\}, \\ &B \times C = \{(e, a), (e, e), (e, i), (e, o), (e, u), (f, a), (f, e), (f, i), (f, o), (f, u), (g, a), (g, e), (g, i), \\ &\qquad (g, o), (g, u), (h, a), (h, e), (h, i), (h, o), (h, u)\}, \\ &C \times B = \{(a, e), (a, f), (a, g), (a, h), (e, e), (e, f), (e, g), (e, h), (i, e), (i, f), (i, g), (i, h), (o, e), \\ &\qquad (o, f), (o, g), (o, h), (u, e), (u, f), (u, g), (u, h)\}, \\ &A \times B \times C = \{(a, e, a), \ldots, (e, h, u)\}, \text{ tiene 100 elementos.} \end{aligned}$$

□

Ejercicio. 8.2.
Dado el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *y los subconjuntos* $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $T = \{0, 3, 6, 9\}$. *Calcular los siguientes subconjuntos de X:*

$$P \cup T, P \cap T, P \times T, P^c, T^c P^c \cap T, P \cup T^c.$$

Ahora calcular los siguientes subconjuntos de $X \times X$*:*

$$P^c \times P^c, P^\times T^c, (P \times T)^c, P^c \times T, (P \times T^c) \cap (P \times P^c), (P \cap T) \times (P^c \cap T^c).$$

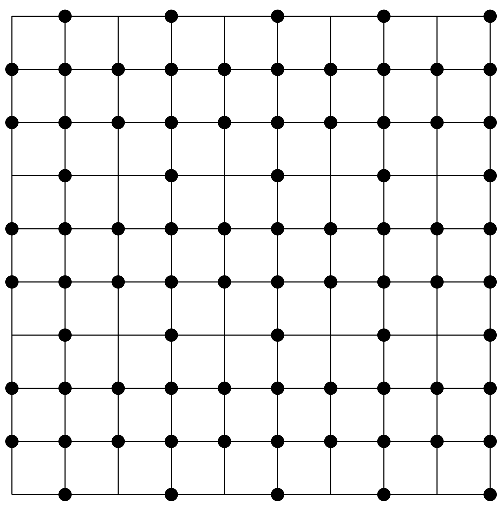
SOLUCIÓN. En el primer caso tenemos:

$$\begin{aligned}
&P \cup T = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},\\
&P \cap T = \{0, 6\},\\
&P \times T = \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), (0, 9), (2, 0), (2, 3), (2, 6), (2, 9), (4, 0), (4, 3), (4, 6), (4, 9),\\
&\qquad (6, 0), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (8, 0), (8, 3), (8, 6), (8, 9)\},\\
&P^c = \{1, 3, 5, 7, 9\},\\
&T^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\},\\
&P^c \cap T = \{3, 9\},\\
&P \cup T^c = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}.
\end{aligned}$$

En el segundo caso:

$$\begin{aligned}
P^c \times P^c = \{&(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (5, 1), (5, 3), (5, 5),\\
&(5, 7), (5, 9), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7), (9, 9)\},\\
P^c \times T^c = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 7), (1, 8), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (5, 1),\\
&(5, 2), (5, 4), (5, 5), (5, 7), (5, 8), (7, 1), (7, 2), (7, 4), (7, 5), (7, 7), (7, 8), (9, 1), (9, 2), (9, 4),\\
&(9, 5), (9, 7), (9, 8)\},
\end{aligned}$$

$$(P \times T)^c = \{(0, 1), \ldots, (9, 9)\},$$



$$\begin{aligned}P^c \times T = \{&(1,0),(1,3),(1,6),(1,9),(3,0),(3,3),(3,6),(3,9),(5,0),(5,3),(5,6),(5,9),\\&(7,0),(7,3),(7,6),(7,9),(9,0),(9,3),(9,6),(9,9),\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P\times T^c)\cap(P\times P^c) = \{&(0,1),(0,5),(0,7),(2,1),(2,5),(2,7),(4,1),(4,5),(4,7),(6,1),\\&(6,5),(6,7),(8,1),(8,5),(8,7)\},\end{aligned}$$

$$(P\cap T)\times(P^c\cap T^c) = \{(0,1),(0,5),(0,7),(6,1),(6,5),(6,7)\}$$

□

Ejercicio. 8.3.
Consideramos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y los subconjuntos $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$ y $T = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Describir los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$ y de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$P\cup T, P\cap T, P\times T, P^c, T^c, P^c\cap T, P\cup T^c$$

SOLUCIÓN. Se tiene:

- $P\cup T$, son los números naturales pares o múltiplos de tres.
- $P\cap T$, son los números pares y múltiplos de 3, por lo tanto los números múltiplos de 6.
- $P\times T$, son los pares de números en los que el primero es par y el segundo es múltiplo de 3.
- P^c, son los números impares.
- T^c, son los números que no son múltiplos de 3.
- $P^c\cap T$, son los números impares que son múltiplos de 3.
- $P\cup T^c$, son los números pares que no sos múltiplos de 3.

□

Ejercicio. 8.4.
Dado el conjunto $X = \{a,b,c,d\}$, determinar el conjunto $P(X)$.

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$\begin{aligned}P(X) = \{&\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\\&\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}.\end{aligned}$$

Tiene 16 elementos. □

Ejercicio. 8.5.
Si queremos obtener una aplicación $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, ¿puede usarse la fórmula: $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a}$?

SOLUCIÓN. No ya que no está definido $f\left(\frac{0}{1}\right)$. □

Ejercicio. 8.6.
Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

(1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n^2$.

(2) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = 2x$.

(3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida $f(n) = n + 1$.

(4) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n + 1$.

(5) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida $f(x) = \frac{3x+2}{4}$.

(6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = +\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN.

(1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n^2$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

(2) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = 2x$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

(3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida $f(n) = n + 1$. Es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva.

(4) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n + 1$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

(5) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida $f(x) = \frac{3x+2}{4}$. Es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva.

(6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = +\sqrt{x}$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

□

Ejercicio. 8.7.
Calcular $g \circ f$ y $f \circ g$, cuando sea posible, para cada uno de los siguientes pares de aplicaciones:

(a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1;$ $\quad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^2.$

(b) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, f(x) = \frac{3x+2}{4};$ $\quad g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, g(x) = x^2.$

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = +\sqrt{x};$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2.$

SOLUCIÓN.

(a) $g \circ f(x) = (x+1)^2;$ $\quad x \overset{f}{\mapsto} x+1 \overset{g}{\mapsto} (x+1)^2.$ $f \circ g(x) = x^2+1;$ $\quad x \overset{g}{\mapsto} x^2 \overset{f}{\mapsto} x^2+1.$

(b) $g \circ f(x) = \left(\frac{3x+2}{4}\right)^2;$ $\quad x \overset{f}{\mapsto} \frac{3x+2}{4} \overset{g}{\mapsto} \left(\frac{3x+2}{4}\right)^2.$ $f \circ g(x) = \frac{3x^2+2}{4};$ $\quad x \overset{g}{\mapsto} x^2 \overset{f}{\mapsto} \frac{3x^2+2}{4}.$

(c) $g \circ f(x) = x;$ $\quad x \overset{f}{\mapsto} +\sqrt{x} \overset{g}{\mapsto} (+\sqrt{x})^2 = x.$ $f \circ g(x) = x;$ $\quad x \overset{g}{\mapsto} x^2 \overset{f}{\mapsto} +\sqrt{x^2} = x.$

$\square$

Ejercicio. 8.8.
Para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ encontrar todas las aplicaciones $f : A \longrightarrow A$ tales que $f \circ f = 1_A$.

SOLUCIÓN. La aplicación f tiene que ser una biyección, por lo tanto si escribimos las imágenes de a, b, c, d en una cuaterna $(f(a), f(b), f(c), f(d))$, ésta deber ser una permutación de A. Como tenemos $4! = 24$ permutaciones de A, éstas son las aplicaciones que verifican la condición pedida.

Todas las permutaciones son:

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,b,c,d) & (a,b,d,c) & (a,c,b,d) & (a,c,d,b) & (a,d,b,c) & (a,d,c,b) \\
(b,a,c,d) & (b,a,d,c) & (b,c,a,d) & (b,c,d,a) & (b,d,a,c) & (b,d,c,a) \\
(c,b,a,d) & (c,b,d,a) & (c,a,b,d) & (c,a,d,b) & (c,d,b,a) & (c,d,a,b) \\
(d,b,c,a) & (d,b,a,c) & (d,c,b,a) & (d,c,a,b) & (d,a,b,c) & (d,a,c,b)
\end{array}
$$

$\square$

Ejercicio. 8.9.
Sean $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ definida por

$$f(1) = f(3) = a, \qquad f(2) = b.$$

Determina:

$$f_*(\{1, 3\}), f_*(\{1, 2\}), f^*(\{a\}), f^*(\{b\}), f^{]}(\{a, b\}).$$

SOLUCIÓN. Tenemos:

- $f_*(\{1, 3\}) = \{b\}$.
- $f_*(\{1, 2\}) = \{a, b\}$.
- $f^*(\{a\}) = \{2\}$.
- $f^*(\{b\}) = \{1, 3\}$.
- $f^*(\{a, b\}) = \{1, 2, 3\}$.

$\square$

Ejercicio. 8.10.
Dado un conjunto X con n elementos, definir una aplicación biyectiva de $P(X)$ en el producto cartesiano $\overbrace{\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}^{n}$. Determinar cual es el cardinal de $P(X)$.

SOLUCIÓN. Primero ordenamos los elementos de X, por ejemplo $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A continuación, para cada subconjunto $S \subseteq X$ definimos una aplicación $f_S : X \longrightarrow \{0, 1\}$ mediante

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in S \text{ y} \\ 0 \text{ si } x \notin S. \end{cases}$$

Ya solo falta asignar a cada f_s la lista $(f_S(x_1), \ldots, f_S(x_n)) \in \overbrace{\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}^{n}$, que evidentemente define una biyección.

Es claro que entonces el cardinal de $P(X)$ es 2^n. $\square$

Ejercicio. 8.11.
Sea el conjunto $X = \{1,2,3\}$. En el conjunto $P(X)$ definimos la siguiente relación:

ARB si la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B.

(a) Probar que R es una relación de equivalencia.

(b) Describir el conjunto cociente $P(X)/R$.

SOLUCIÓN.

(a) Claro que R verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, luego es una relación de equivalencia.

(b) La suma máxima de los elementos de un subconjunto de X es 6; entonces cada clase estará determinada por un entero entre 0 y 6. Tenemos pues siete clases:

$$\begin{array}{ll} 0: & \varnothing \\ 1: & \{1\} \\ 2: & \{2\} \\ 3: & \{1,2\},\{3\} \\ 4: & \{1,3\} \\ 5: & \{2,3\} \\ 6: & \{1,2,3\}. \end{array}$$

□

Ejercicio. 8.12.
Para cada una de las relaciones de equivalencia definida sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dar una interpretación geométrica del conjunto cociente:

(a) $(a,b)R(c,d)$ *si* $a+b=c+d$.

(b) $(a,b)R(c,d)$ *si* $a^2+b^2=c^2+d^2$

(c) $(a,b)R(c,d)$ *si* $\begin{cases} b=0 \text{ y } d=0 \text{ o bien} \\ b\neq 0, d\neq 0, \text{ y } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \end{cases}$

SOLUCIÓN.

(a) La clase de (a,b) está determinada por un número r, que es la suma de a y b. Podemos escribir
$$\overline{(a,b)}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \ y=-x+r\}$$
Por lo tanto cada clase es una recta paralela a la recta de ecuación $Y=-X$.

(b) La clase de (a,b) está determinada por un número r, no negativo, que es la suma a^2+b^2. Por lo tanto cada clase de equivalencia es una circunferencia centrada en el origen o el punto $(0,0)$.

(c) Es claro que la recta $Y=0$ es una clase de equivalencia. Si $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ verifica $b\neq 0$ y llamamos $k=a/b$, entonces la clase de (a,b) es $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid \ x/y=k\}$, es por tanto la recta $Y=kX$ salvo el punto $(0,0)$.

□

Ejercicio. 8.13.
En el conjunto $P(\mathbb{N})$ se define la siguiente relación:

$$XRY \text{ si } |X| = |Y|.$$

Probar que esta relación es de equivalencia y describir el conjunto cociente.

SOLUCIÓN. Es claro que es una relación de equivalencia. El conjunto cociente es el conjunto de los números naturales; n es la clase del conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ junto con la clase de $\mathbb{N}$, ya que todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ son biyectivos y por lo tanto tienen el mismo cardinal. □

Ejercicio. 8.14.
Considerar la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ que a cada número entero n le asocia el resto de dividir n por 7.

(a) Calcular $f(259)$.

(b) Calcular $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Calcular la descomposición canónica de f.

SOLUCIÓN.

(a) Como $259 = 7 \times 37$, el resto de la división es igual a 0 y por lo tanto $f(259) = 0$.

(b) La imagen de f es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(c) La descomposición canónica es:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{N} \\ \mathbb{N}/R \arrow[r, "b"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

donde R es la relación de equivalencia definida por f: nRm si $n - m$ es múltiplo de 7, por lo tanto tenemos siete clases de equivalencia:

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{0, 7, 14, \ldots, -7, -14, \ldots\} \\ \overline{1} &= \{1, 8, \ldots, -6, -13, \ldots\} \\ \overline{2} &= \{2, \ldots\} \\ \overline{3} &= \{3, \ldots\} \\ \overline{4} &= \{4, \ldots\} \\ \overline{5} &= \{5, \ldots\} \\ \overline{6} &= \{6, \ldots\} \end{aligned}$$

Entonces b está definida $b(\overline{x}) = x$.

$\square$

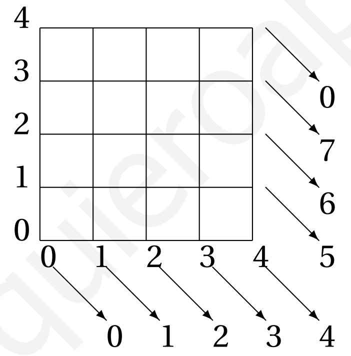
Ejercicio. 8.15.
Se considera la aplicación $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, que asocia al par* (x, y) *el resto de la division de* $x + y$ *por 8.*

(a) Calcular $f(3, 4)$*.*

(b) Calcular la descomposición canónica de f

SOLUCIÓN. El resto de la división de $3 + 4 = 7$ por 8 es 7. Por lo tanto $f(3, 4) = 7$.

La aplicación f se puede representar por el siguiente gráfico, en el que se asigna a cada elemento su clase para la relación de equivalencia definida por f.



El conjunto cociente es:

$$C = \{\overline{(0,0)}, \overline{(1,0)}, \overline{(2,0)}, \overline{(3,0)}, \overline{(4,0)}, \overline{(4,1)}, \overline{(4,2)}, \overline{(4,3)}.\}$$

La descomposición canónica es:

$$\begin{tikzcd}
\{0,1,2,3,4\} \times \{0,1,2,3,4\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \arrow[d, equal, "i"] \\
C \arrow[r, "b"] & \{0,1,2,3,4,5,6,7\}
\end{tikzcd}$$

$\square$