Calcular a y b para que la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - ax + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 2) = b - a + 2$$

$$2a - b + 1 = b - a + 2 \Longrightarrow 3a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad f': \begin{array}{c|c} 4ax - b & 2bx - a \\ \hline \rightarrow \; - & + \; \leftarrow \\ & 1 \end{array}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \; f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 4a - b = 2b - a \Longrightarrow 5a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 5x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -5x^2 + 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -12x + 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ -10x + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2] / f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-12 - 1}{2} = -\frac{13}{2}$$

Si $c < 1$: $f'(c) = -12c + 5 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c = \frac{23}{24}$ solución válida. Si $c \geq 1$: $f'(c) = -10c + 3 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c = \frac{19}{20}$ solución no válida.