T R I G O N O M E T R Í A

1. Una escalera de mano de 5 metros de longitud está apoyada contra una pared alcanzando una altura de 3'5 metros. Halla, **razonadamente y con el mínimo número de cálculos posible**, el ángulo que forma la escalera con la pared.
2. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ y que α es un ángulo agudo; halla, **razonadamente y sin utilizar la calculadora** el valor de $\operatorname{sen}\alpha$, dejando el resultado racionalizado y simplificado.

1. La escalera apoyada contra la pared forma un triángulo rectángulo del que ella es la hipotenusa (que mide 5 m) y la vertical trazada desde el punto en que apoya la escalera hasta el suelo (mide 3'5 m) es el cateto contiguo al ángulo α que se nos pide. Por lo tanto:

$$\cos\alpha = \frac{3'5}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arccos}\frac{3'5}{5} = 45'57^{\circ}$$

$$\boxed{\text{El ángulo que forma la escalera con la pared es de } 45'57^{\circ}}$$

2. Sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ y que $\operatorname{sen}\alpha$ es positivo porque α, al ser agudo, pertenece al primer cuadrante.

Teniendo en cuenta que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y que $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ como $\operatorname{tg}\alpha = 2$ tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales (el $\operatorname{sen}\alpha$) nos piden:

Para resolverlo, despejamos $\cos\alpha$ de la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2 = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{sen\alpha}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación fundamental, la única incógnita es $\operatorname{sen}\alpha$

$$sen^2\alpha + \left(\frac{sen\alpha}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow sen^2\alpha + \frac{sen^2\alpha}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\,sen^2\alpha + sen^2\alpha = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5\,sen^2\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad sen^2\alpha = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad sen\alpha = +\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

También podríamos obtener este valor a partir de las definiciones de seno y tangente de un ángulo agudo de la siguiente manera:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto\_ opuesto}}{\text{Cateto\_contiguo}}$$ y, para que $\operatorname{tg}\alpha = 2 \Rightarrow$ Cateto_opuesto = 2 · Cateto_contiguo

Si tomamos, por ejemplo, Cateto_contiguo = 1 cm $\Rightarrow$ Cateto_opuesto=2cm y la hipotenusa valdrá, según el teorema de Pitágoras: Hipotenusa = $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ cm por lo tanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto\_opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2\text{ cm}}{\sqrt{5}\text{ cm}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$