

CURSOS 0
MATEMÁTICAS

Conjuntos, correspondencias y relaciones

Ana María Díaz Hernández

Departamento de Matemática Aplicada I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Índice general

1.	Introducción y objetivos	3
1.1.	Objetivos	3
2.	Prueba de autodiagnóstico	4
3.	Contenidos	5
3.1.	Ficha 1: Descripción de un conjunto	5
3.2.	Ficha 2: Partes de un conjunto	10
3.3.	Ficha 3: Operaciones con conjuntos	19
3.4.	Ficha 4: Correspondencia entre dos conjuntos	35
3.5.	Ficha 5: Relaciones binarias	44
	Índice alfabético	54

1. Introducción y objetivos

Dada la diversa procedencia de los estudiantes que se incorporan a la UNED es natural que no todos tengan la misma base de conocimientos. Algunos no necesitarán siquiera leer las páginas siguientes pero a los que no están familiarizados con los términos de la teoría de conjuntos les serán necesarias.

Los conjuntos, el lenguaje formal y los símbolos utilizados son herramientas ineludibles para abordar el estudio del resto de las materias en las carreras de ciencias y tecnológicas.

1.1. Objetivos

Con la inclusión de este módulo pretendemos que los estudiantes puedan:

- Entender el lenguaje matemático de los símbolos más frecuentes.
- Expresar frases del lenguaje natural con lenguaje matemático y simbólico.
- Utilizar con soltura los conjuntos y los gráficos.
- Aplicar a otras materias los conocimientos adquiridos.

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar el nivel de conocimientos que tiene en este tema.

{Vocales del alfabeto español} es la descripción de un conjunto por extensión.	Verdadero	Falso
$A = \{1, 3, 5, 7\}$ se puede describir por comprensión.	Verdadero	Falso
$5 \subset A$ es una expresión correcta referida al conjunto A anterior.	Verdadero	Falso
$A \cup B$ tiene 10 elementos si $B = \{x x \text{ son números impares positivos menores que } 12\}$ y A es el conjunto anterior.	Verdadero	Falso
$A \cap B \subset B$.	Verdadero	Falso
$A \cap B = A$ si A y B son los conjuntos anteriores.	Verdadero	Falso
$A - (A \cap B) = \emptyset$ si A y B son los conjuntos anteriores.	Verdadero	Falso
Una correspondencia entre dos conjuntos es un subconjunto del producto cartesiano de ambos.	Verdadero	Falso
Una relación binaria en un conjunto, A , es una correspondencia de A en A .	Verdadero	Falso
Una relación binaria, R , es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.	Verdadero	Falso

Si ha tenido muchas dificultades debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación.

Si sólo ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas.

Si ha respondido todo correctamente pase a otro módulo.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Descripción de un conjunto

Aunque el uso de la palabra conjunto está generalizado, al intentar definirlo se incurre en contradicciones de lógica que dan lugar a famosas paradojas, para evitarlo utilizaremos la idea intuitiva de **conjunto**: “colección de objetos”.

- Si dado un objeto cualquiera, a , se sabe si pertenece al conjunto A , diremos que el **conjunto A está bien definido**.
Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas.
Los elementos se denotan con letras minúsculas.
 $a \in A$ quiere decir que a es un elemento de A .
- Definir un conjunto por **comprensión** es dar una propiedad que caracteriza a sus elementos. Si un elemento tiene la **propiedad característica** pertenece al conjunto.
- Si un conjunto es finito se puede describir por **extensión**. (Dando todos sus elementos)
- Un conjunto es **finito** si tiene un número finito de elementos.
- Para representar conjuntos son muy útiles los **diagramas**, aunque hay muchos tipos, los más conocidos son los “**Diagramas de Venn o Círculos de Euler**”.
- Un conjunto que no tiene ningún elemento se llama **conjunto vacío**, y se representa por el símbolo \emptyset .

Ejemplo 1: Sea V el conjunto de vocales del alfabeto español.

- V es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto cualquiera podemos saber si pertenece al conjunto.

a, u son elementos del conjunto: $a \in V$ y $u \in V$
 $j, 7$ no son elementos del conjunto: $j \notin V$ y $7 \notin V$
 $mesa$ no es un elemento del conjunto: $mesa \notin V$

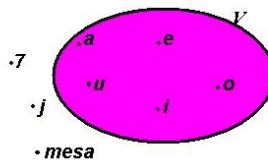
- El conjunto $V = \{Vocales\ del\ alfabeto\ español\}$ está descrito por **comprensión**.

La **propiedad que caracteriza** a sus elementos es “*ser vocal del alfabeto español*”.

- Este conjunto también queda perfectamente definido por **extensión**, es decir, dando el listado de todos sus elementos:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- V se puede representar mediante el **diagrama**:



- V no es un **conjunto vacío**: $V \neq \emptyset$.
Los elementos que no pertenecen a V quedan fuera del círculo.
- Para describir conjuntos se utilizan “llaves”: $\{\dots\}$

Ejemplo 2: Si A es el conjunto de números enteros positivos que son múltiplos de 3 y menores que 15, entonces:

- A es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto cualquiera podemos saber si pertenece a A o no:

$6 \in A$: 6 pertenece a A porque $6 = 2 \cdot 3$ es menor que 15.

$21 \notin A$: 21 no es del conjunto porque no es menor que 15.

- $A = \{\text{Números enteros positivos, múltiplos de 3, menores que 15}\}$ está descrito por **comprensión**.

Es frecuente escribir A con lenguaje matemático: ¹

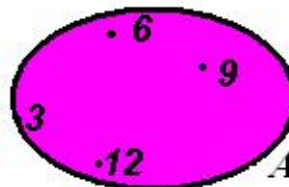
$$\{x|x \in \mathbb{Z}^+, x = 3, x < 15\} = \{x|x = 3k, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 4\}$$

Una **propiedad que caracteriza** a sus elementos es “*ser enteros positivos múltiplos de 3 y menores que 15*”.

- Por ser un conjunto finito también se puede definir por **extensión**, es decir, dando el listado de todos sus elementos:

$$A = \{3, 6, 9, 12\}$$

- A queda representado por el siguiente **diagrama de Venn**:



Ejemplo 3: Descripción del conjunto $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.

- A es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto cualquiera podemos saber si pertenece a dicho conjunto A :

$6 \notin A$: 6 no es un elemento del conjunto.

$0 \in A$: 0 sí es uno de los elementos del conjunto A .

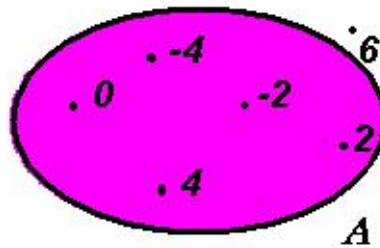
- El conjunto $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ está descrito por **extensión** pero se pueden encontrar **propiedades que caracterizan** sus elementos, por ejemplo:

“Ser números pares de valor absoluto menor que 5”

- Utilizando ésta u otra propiedad característica el conjunto queda definido por **comprensión**:

$$A = \{x \mid x \text{ son números pares con } -5 < x < 5\}$$

- A queda representado por el siguiente **diagrama de Venn**:



- A no es el **conjunto vacío**: $A \neq \emptyset$.

Ejemplo 4: Descripción del conjunto A de los números enteros positivos que son solución de la ecuación $x + 5 = 2$.

- A es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto, x , podemos saber si es un número positivo que cumple $x + 5 = 2$.

$6 \notin A$: 6 no es un elemento del conjunto porque $6 + 5 \neq 2$.

$-3 \notin A$: -3 no pertenece al conjunto porque no es positivo.

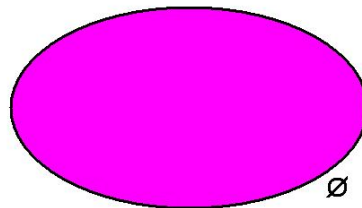
- $A = \{\text{números enteros positivos solución de la ecuación } x + 5 = 2\}$ está descrito por **comprensión**; en lenguaje matemático sería:

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}^+; x + 5 = 2\}$$

- La **propiedad que caracteriza** a sus elementos, x , es:

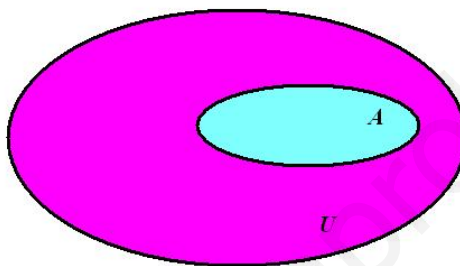
“Ser números enteros positivos que cumplen $x + 5 = 2$ ”

- Este conjunto también quedaría perfectamente definido dando el listado de todos sus elementos, es decir, ninguno. A es el **conjunto vacío**: $A = \emptyset$.



3.2. Ficha 2: Partes de un conjunto

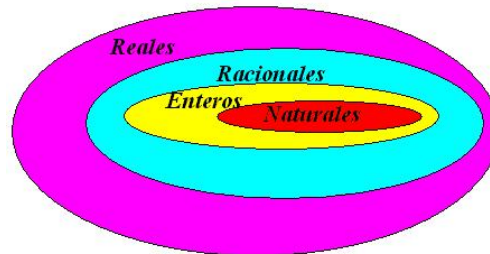
- Si cada elemento de un conjunto A pertenece a otro conjunto U diremos que A está **contenido** en U o que A es un **subconjunto** de U y escribiremos $A \subset U$.



- Cada subconjunto de un conjunto es una parte de dicho conjunto.
Los elementos del conjunto de partes de un conjunto son los subconjuntos de dicho conjunto.
- Dos conjuntos son **iguales** cuando todos los elementos de ambos coinciden:

$A = B$ si A está contenido en B y B está contenido en A .

- Si cada conjunto está contenido en el siguiente se llaman **conjuntos anidados**.



- Conjunto **referencial o universal** puede ser cualquier conjunto que contenga a todos los conjuntos a que nos estamos refiriendo en cada caso.
- **Conjunto potencia o de partes del conjunto** es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto dado.
- $P(A)$ representa el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A .
- **El número de subconjuntos** de un conjunto de n elementos es 2^n .

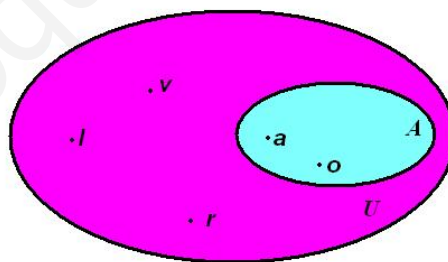
Ejemplo 5: Siendo $A = \{a, o\}$ el conjunto de las vocales de “valor” y $U = \{v, a, l, o, r\}$ el conjunto de las letras de “valor”, se cumple:

- Cada elemento del conjunto A pertenece al conjunto U :

$$\left. \begin{array}{l} a \in A \text{ y } a \in U \\ o \in A \text{ y } o \in U \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset U \text{ (} A \text{ está contenido en } U \text{).}$$

$A \subset U$ es equivalente a $U \supset A$ (U contiene a A).

- U **no está contenido** en A porque hay elementos de U que no pertenecen a A , por ejemplo $v \in U$ y $v \notin A$.
- Los conjuntos finitos A y U no son **iguales** porque no tienen los mismos elementos y, como es evidente, aunque A sí está contenido en U , U no está contenido en A . A tiene tres elementos y U tiene cinco elementos.



$A \subset U$

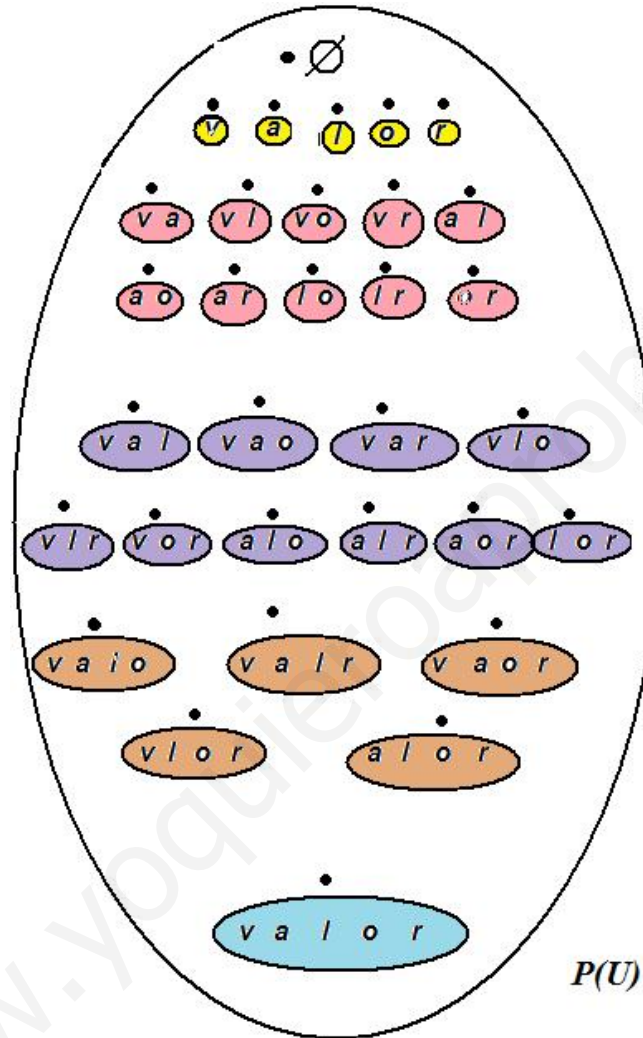
- Conjunto **referencial** o **universal**. En este caso estamos utilizando los conjuntos A y U , el conjunto referencial es U , ya que A es un subconjunto de U .

Partes del conjunto U : Con los elementos del conjunto anterior, U , se pueden formar los siguientes subconjuntos:

- De ningún elemento: El conjunto vacío: \emptyset .
- De un elemento: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 1 en 1, es decir, $\frac{5}{1} = 5$, que son:
 $\{v\}, \{a\}, \{l\}, \{o\}, \{r\}$.
- De dos elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 2 en 2, es decir, $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, que son:
 $\{v, a\}, \{v, l\}, \{v, o\}, \{v, r\}, \{a, l\}, \{a, o\}, \{a, r\}, \{l, o\}, \{l, r\}, \{o, r\}$.
- De tres elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 3 en 3, es decir, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$, que son:
 $\{v, a, l\}, \{v, a, o\}, \{v, a, r\}, \{v, l, o\}, \{v, l, r\}, \{v, o, r\}, \{a, l, o\}, \{a, l, r\}, \{a, o, r\}, \{l, o, r\}$.
- De cuatro elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 4 en 4, es decir, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$, que son:
 $\{v, a, l, o\}, \{v, a, l, r\}, \{v, a, o, r\}, \{v, l, o, r\}, \{a, l, o, r\}$.
- De cinco elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 5 en 5, es decir, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$, que es:
 $\{v, a, l, o, r\}$.

Número de subconjuntos de U :

Con los elementos de U del ejemplo 5 se pueden formar $2^5 = 32$ subconjuntos.



- Cada uno de los elementos que forman el conjunto de partes de U es un subconjunto representado en el diagrama por una ficha coloreada que, a su vez es un conjunto de distintos elementos de U .

Ejemplo 6: Si x, y representan números enteros no negativos de un dígito, el conjunto $U = \{x | x + y = 9 \text{ con } y \leq 4\}$ se puede describir por extensión:

Si $y = 4 \Rightarrow x = 5$; Si $y = 3 \Rightarrow x = 6$; Si $y = 2 \Rightarrow x = 7$;
Si $y = 1 \Rightarrow x = 8$; Si $y = 0 \Rightarrow x = 9$.

$$U = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$A = \{5, 7, 9\}$ y $B = \{6, 8\}$ son subconjuntos de U entre los que hay las siguientes relaciones de inclusión:

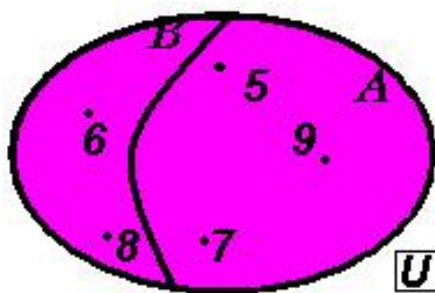
$$\left. \begin{array}{l} 5 \in A \text{ y } 5 \in U \\ 7 \in A \text{ y } 7 \in U \\ 9 \in A \text{ y } 9 \in U \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ está contenido en } U: A \subset U.$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 \in B \text{ y } 6 \in U \\ 8 \in B \text{ y } 8 \in U \end{array} \right\} \Rightarrow B \text{ está contenido en } U: B \subset U.$$

A no está contenido en B : $5, 7, 9 \in A$ y $5, 7, 9 \notin B$.

B no está contenido en A : $6, 8 \in B$ y $6, 8 \notin A$.

U no está contenido en A ni en B .



En este caso estamos utilizando los conjuntos A, B y U , un conjunto referencial es U , ya que A y B son subconjuntos de U .

Con los elementos de U se pueden formar los siguientes subconjuntos o partes:

- De ningún elemento: \emptyset .
- De un elemento: $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$.
- De dos elementos: $\{5, 6\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 8\}$, $\{5, 9\}$, $\{6, 7\}$, $\{6, 8\}$, $\{6, 9\}$, $\{7, 8\}$, $\{7, 9\}$, $\{8, 9\}$.
- De tres elementos: $\{5, 6, 7\}$, $\{5, 6, 8\}$, $\{5, 6, 9\}$, $\{5, 7, 8\}$, $\{5, 7, 9\}$, $\{5, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8\}$, $\{6, 7, 9\}$, $\{6, 8, 9\}$, $\{7, 8, 9\}$.
- De cuatro elementos: $\{5, 6, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 9\}$, $\{5, 7, 8, 9\}$, $\{5, 6, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8, 9\}$.
- De cinco elementos: $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

El número de subconjuntos de U es $2^5 = 32$.

Todo conjunto tiene dos **subconjuntos propios**: El vacío y él mismo.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Describir por extensión el conjunto A formado por los números enteros cuyo valor absoluto es menor que 6.

Ejercicio 2: ¿Es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6\}$ el conjunto del ejercicio anterior?

Ejercicio 3: Si B es el conjunto de números solución de la ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$, ¿se verifica $B \subset A$?

Ejercicio 4: ¿Es cierto que $A \subset A$?

Ejercicio 5: ¿Cuántos subconjuntos tiene A ?

Ejercicio 6: ¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de B ?

Ejercicio 7: ¿Es \emptyset un subconjunto de A ?

Ejercicio 8: ¿Son equivalentes las expresiones $\emptyset \in A$ y $\emptyset \subset A$?

Ejercicio 9: ¿Es cierto que ningún conjunto puede tener un subconjunto sin elementos?

Ejercicio 10: ¿Cuántos subconjuntos de A tienen 9 elementos?

Soluciones

Solución 1: $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solución 2: No, sobran 6 y -6.

Solución 3: No, $6 \in B$ pero $6 \notin A$.

Solución 4: Sí.

Solución 5: $2^{11} = 2048$.

Solución 6: $2^2 = 4$.

Solución 7: Sí.

Solución 8: No, en el primer caso \emptyset es un elemento de A , en el segundo es un subconjunto.

Solución 9: No.

Solución 10: Combinaciones de 11 elementos tomadas de 9 en 9, es decir 110.

3.3. Ficha 3: Operaciones con conjuntos

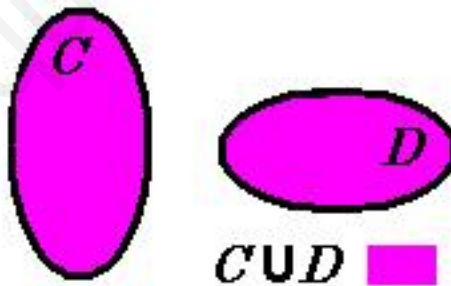
Entre los conjuntos se pueden definir muchas operaciones, las más frecuentes son:

- **Unión de los conjuntos** C y D . Se escribe $C \cup D$. Es el conjunto formado por los elementos que están en C o en D o en ambos, es decir:

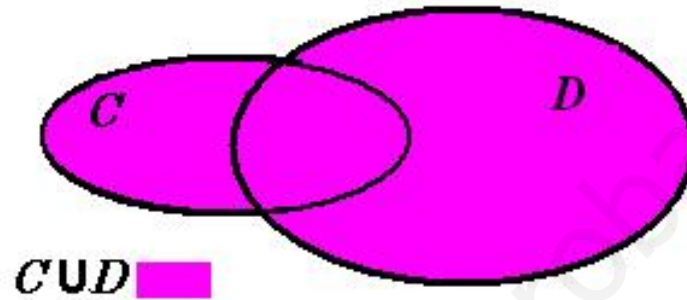
$$C \cup D = \{x \mid x \in C \text{ ó } x \in D\}$$

En los diagramas siguientes la parte coloreada corresponde a $C \cup D$ en las distintas situaciones:

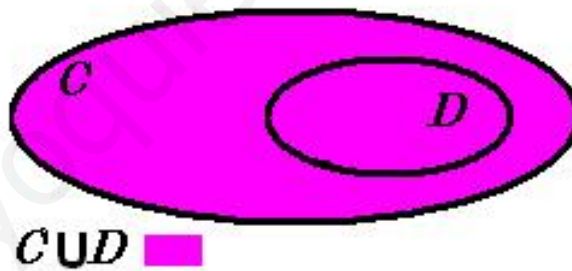
- Cuando los conjuntos dados no tienen elementos comunes:



- Cuando los conjuntos dados tienen elementos comunes:



- Cuando D está contenido en C :

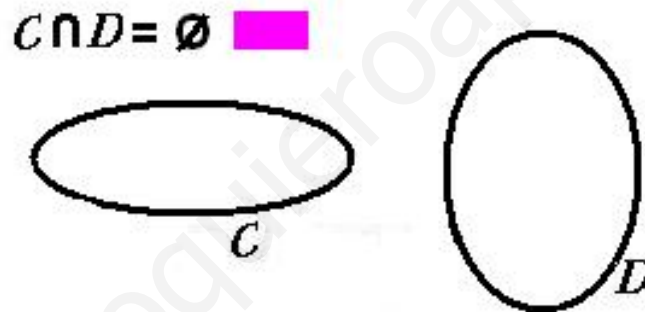


- **Intersección de los conjuntos** C y D . Se escribe $C \cap D$. Es el conjunto formado por los elementos que están en C y en D , es decir:

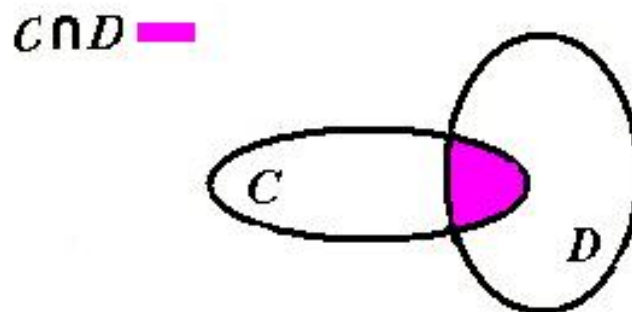
$$C \cap D = \{x \mid x \in C \text{ y } x \in D\}$$

En los diagramas siguientes la parte coloreada corresponde a $C \cap D$ en los distintos casos:

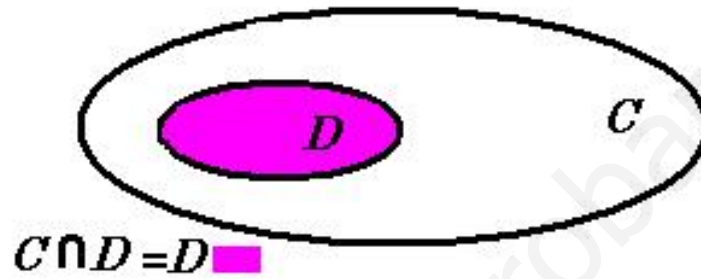
- Cuando los conjuntos dados son conjuntos **disjuntos**, es decir, su intersección es vacía:



- Cuando los conjuntos dados tienen algún elemento común:



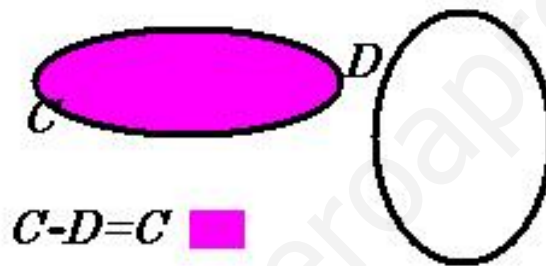
- Cuando D está contenido en C :



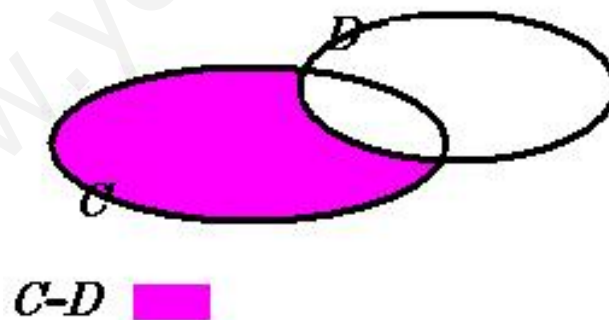
- **Diferencia de los conjuntos** C y D . Se escribe $C - D$. Es el conjunto formado por los elementos que están en C y no están en D , es decir:

$$C - D = \{x \mid x \in C \text{ y } x \notin D\}$$

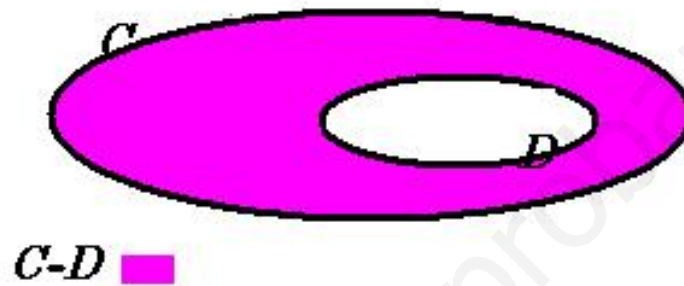
- Cuando los conjuntos dados son **disjuntos**:



- Cuando los conjuntos dados tienen algún elemento común:



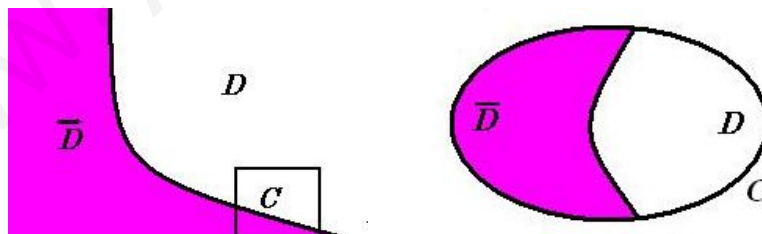
- Cuando uno de los conjuntos dados está contenido en el otro:



Cuando el referencial es C , $C - D$ es el **complementario** de D en C . Se escribe \overline{D} .

Es el conjunto formado por los elementos de C que no están en D , es decir:

$$\overline{D} = \{x \mid x \in C \text{ y } x \notin D\}.$$



- **Diferencia simétrica** es la unión de los dos conjuntos diferencia, es decir:

$$\begin{aligned} C \Delta D &= (C - D) \cup (D - C) \\ &= \{x \mid x \in C - D \text{ ó } x \in D - C\} \end{aligned}$$

Observando el diagrama, vemos que está formada por los elementos de la unión que no están en la intersección:

$$C \Delta D = \{x \mid x \in (C \cup D) - (C \cap D)\}$$



Cuando los conjuntos C y D son finitos se puede contar el número de elementos que tienen, siendo evidente la relación:

$$\begin{aligned} \text{Núm de elementos de } (C \cup D) &= \\ \text{Núm de elementos de } C &+ \text{Núm de elementos de } D - \\ &- \text{Núm de elementos de } C \cap D. \end{aligned}$$

Ejemplo 7: Volvamos al ejemplo 5 y sean $C = \{v, a, r\}$ y $D = \{a, l, r\}$, manteniendo $U = \{v, a, l, o, r\}$ como conjunto referencial.

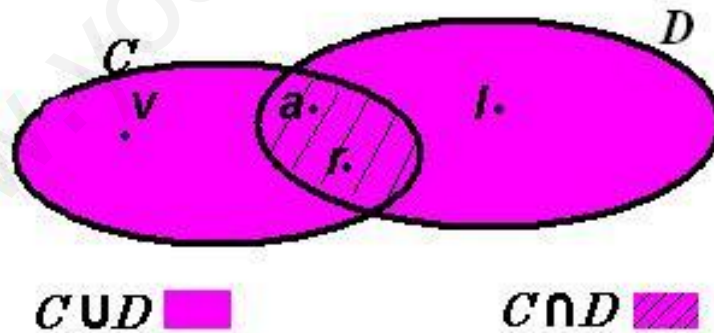
- Los objetos matemáticos entre los que vamos a efectuar las operaciones son los 32 elementos de $P(U)$ (partes de U) que describimos en el ejemplo 5.
- Unión :

$$C \cup D = \{v, a, l, r\}$$

- Intersección:

$$C \cap D = \{a, r\}$$

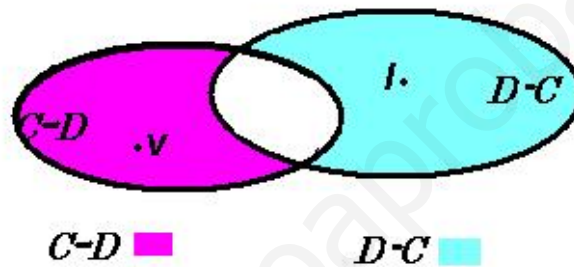
- $C \cap D \neq \emptyset$, por tanto C y D no son conjuntos disjuntos.



Ejemplo 8: **Diferencias** entre los conjuntos C y D del ejemplo 7.

- Hay dos **conjuntos diferencia**:

$$C - D = \{v\}; \quad D - C = \{l\}$$



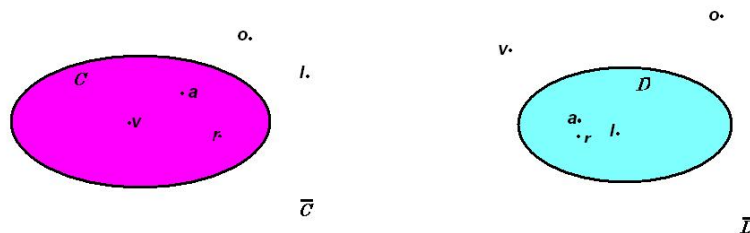
- Respecto al referencial U se pueden formar los dos conjuntos complementarios:

Complementario de C : Está formado por los elementos de U que no están en C .

Complementario de D : Está formado por los elementos de U que no están en D .

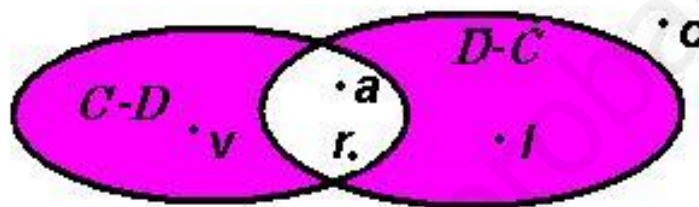
$$\bar{C} = \{l, o\};$$

$$\bar{D} = \{v, o\}$$



- **Diferencia simétrica:**

$$C \Delta D = (C - D) \cup (D - C) = \{v, l\}$$



$$C \Delta D = (C - D) \cup (D - C) \quad \blacksquare$$

- **Es evidente que se verifica la relación $4 = 3 + 3 - 2$:**

Número de elementos de $(C \cup D) =$
Número de elementos de $C +$ Número de elementos de $D -$
Número de elementos de $C \cap D$

Ejemplo 9: Sean A el conjunto de enteros positivos mayores que 2 y menores que 6 y B el conjunto de números impares positivos de un sólo dígito.

- Descripción por comprensión:

$$A = \{x \mid x \text{ son enteros positivos tales que } 2 < x < 6\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ son impares positivos de un sólo dígito}\}$$

- Descripción por extensión:

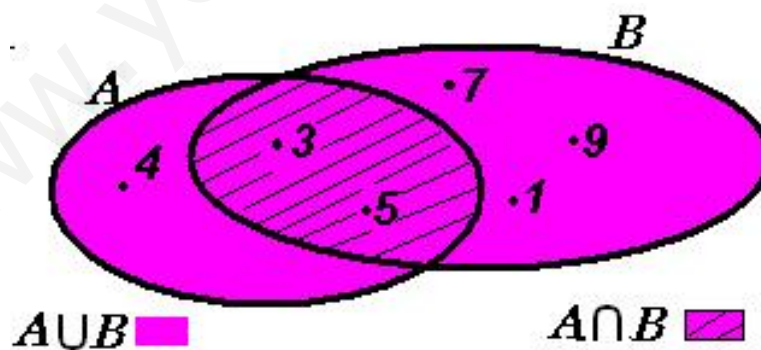
$$A = \{3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- Unión:

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

- Intersección:

$$A \cap B = \{3, 5\}$$



Ejemplo 10: Otras operaciones entre los conjuntos del ejemplo 9.

- Diferencias

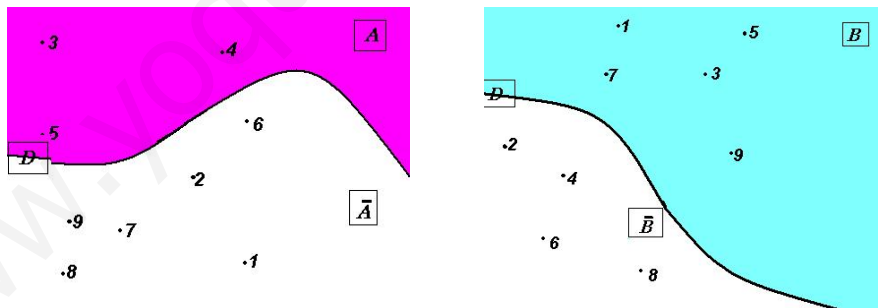
$$A - B = \{4\}; \quad B - A = \{1, 7, 9\}$$

- Complementario de A , \bar{A} , y complementario de B , \bar{B} .

A y B son subconjuntos de diferentes conjuntos, su complementario depende del referencial elegido, que puede ser cualquier conjunto que los contenga.

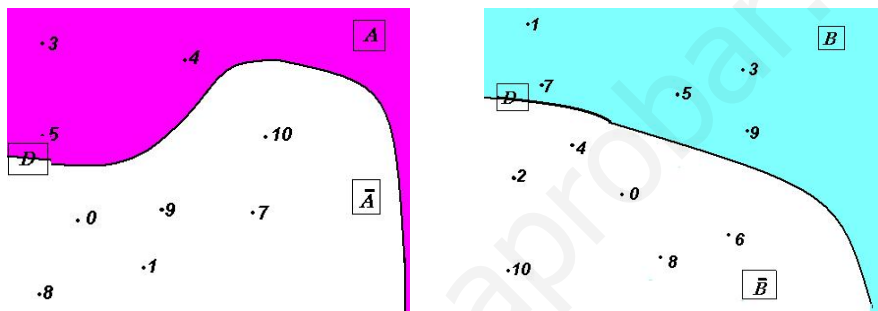
Si tomamos como referencial $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ los complementarios de A y B son:

$$\bar{A} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}; \quad \bar{B} = \{2, 4, 6, 8\}$$



- Si tomamos como referencial $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, los complementarios de A y B son:

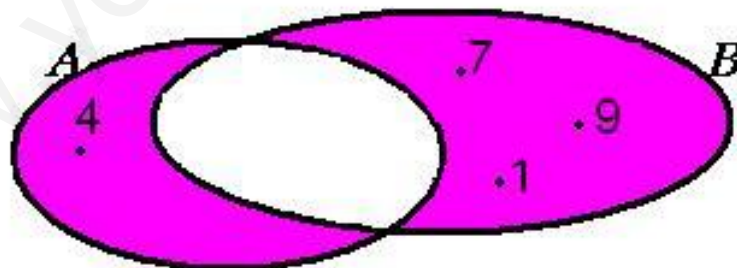
$$\bar{A} = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}; \quad \bar{B} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$



- Diferencia simétrica:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{4\} \cup \{1, 7, 9\} = \{1, 4, 7, 9\}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 4, 7, 9\}$$



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad \text{■}$$

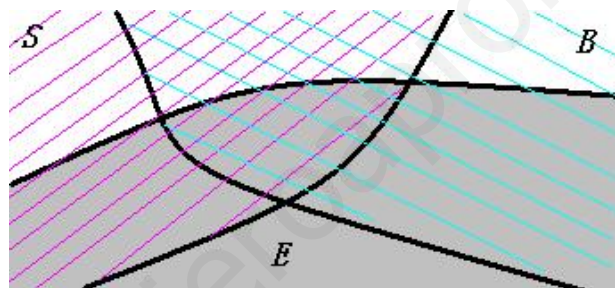
Ejemplo 11: En la ficha de cada trabajador de una empresa figura si es soltero, si tiene estudios de Bachillerato y si es español.

- El referencial es $U = \{x \mid x \text{ son trabajadores de la empresa}\}$

$$S = \{x \mid x \text{ son trabajadores solteros de la empresa}\}$$

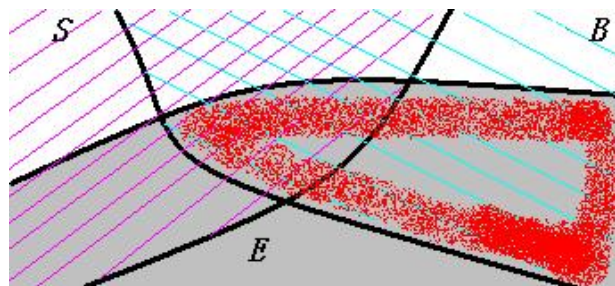
$$B = \{x \mid x \text{ son trabajadores bachilleres de la empresa}\}$$

$$E = \{x \mid x \text{ son trabajadores españoles de la empresa}\}$$

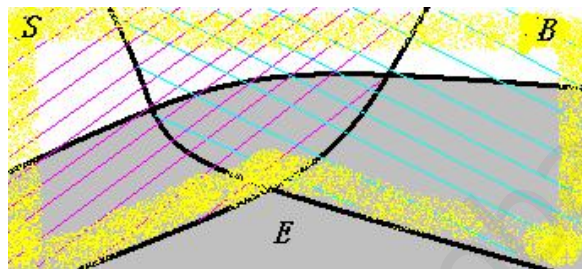


Con los conjuntos S , B , E se pueden hacer las operaciones que conocemos. Los distintos resultados quedan representados en un diagrama. Por ejemplo:

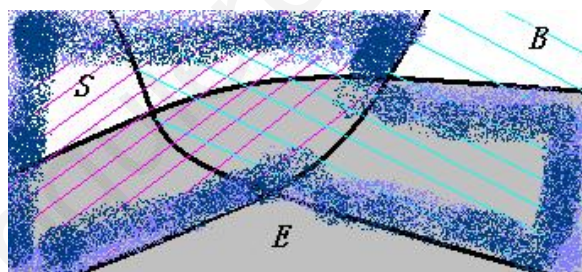
- $B \cap E$: Sus elementos son “Trabajadores bachilleres españoles de la empresa.”



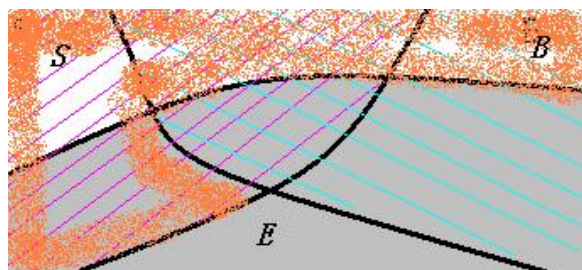
- $S \cup B$: Sus elementos son “Trabajadores de la empresa solteros o con estudios de Bachillerato.”



- $S \cup (B \cap E)$: Sus elementos son “Trabajadores de la empresa solteros o trabajadores de la empresa españoles con estudios de Bachillerato.”



- $(S \cup B) - (B \cap E)$: Sus elementos son “Trabajadores de la empresa solteros o con estudios de Bachillerato que no sean españoles con estudios de bachillerato.”



Autoevaluación ficha 3

Sabiendo que A es el conjunto de números enteros cuyo valor absoluto es menor que 3 y B es el conjunto de números solución de la ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$, responda a las siguientes cuestiones:

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 6\}$.	Verdadero	Falso
$B \subset A \cup B$ y $A \subset A \cup B$.	Verdadero	Falso
A y B son disjuntos.	Verdadero	Falso
$A \cap B = \{-2, 6\}$.	Verdadero	Falso
$A - B = \{2, 1, 0, -1\}$.	Verdadero	Falso
$B - A = \{6\}$.	Verdadero	Falso
Si se toma como referencial $A \cup B$, el complementario de B es A .	Verdadero	Falso
$A \Delta B = \{-1, 0, 1, 2, 6\}$	Verdadero	Falso
$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$	Verdadero	Falso
$(A \cap B) \cup (B - A) = A$.	Verdadero	Falso

3.4. Ficha 4: Correspondencia entre dos conjuntos

- Se llama **producto cartesiano** de los conjuntos A y B al conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar siendo el primer elemento del par de A y el segundo de B .

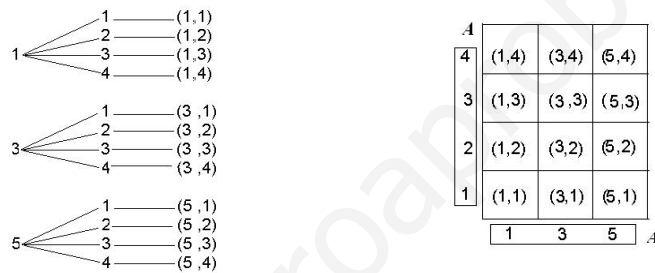
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- Con cada elemento de A se pueden formar tantos pares como elementos tenga B , por tanto el **número de elementos de $A \times B$** es el número de elementos de A por el número de elementos de B .
- Cualquier parte de $A \times B$ establece una correspondencia entre estos dos conjuntos. El conjunto de pares que la forman se llama **grafo**.
- Una **correspondencia**, f , entre A y B es un subconjunto de $A \times B$, es decir: $f \subset A \times B$.
- En una correspondencia de A en B el conjunto A se llama **conjunto inicial**.
- El subconjunto de A que interviene en f se llama **conjunto original** de la correspondencia.
- En una correspondencia de A en B el conjunto B se llama **conjunto final**.
- El subconjunto de B que interviene en f se llama **conjunto imagen** de la correspondencia.
- Las correspondencias, f , entre A y B que tienen la característica de que cada elemento de A está sólo en un par de f reciben el nombre de **aplicaciones**.

Ejemplo 12: Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ su producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

- $A \times B$ se puede representar mediante **diagramas** como:



- Número de elementos (pares) de $A \times B = 3 \cdot 4 = 12$.

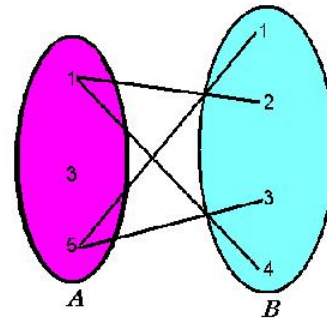
Ejemplo 13: Si A y B son los conjuntos del ejemplo 12, $f = \{(1, 2), (1, 4), (5, 1), (5, 3)\}$ es un subconjunto de $A \times B$ que establece una correspondencia entre A y B .

- Los pares de $A \times B$ que aparecen resaltados forman f :

$$\{(1, 1), (\mathbf{1, 2}), (1, 3), (\mathbf{1, 4}), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (\mathbf{5, 1}), (5, 2), (\mathbf{5, 3}), (5, 4)\}$$

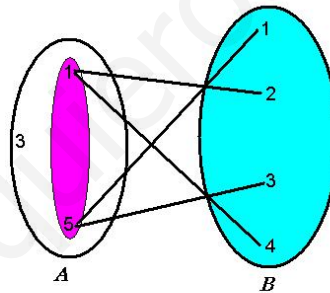
- f es un conjunto descrito por extensión que se puede representar mediante **diagramas** como:

	B		
4	(1,4)		
3			(5,3)
2	(1,2)		
1			(5,1)
	1	3	5
	A		



Ejemplo 14: En la correspondencia f del ejemplo 13 intervienen el subconjunto $\{1, 5\}$ de A y el subconjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ de B y se verifica:

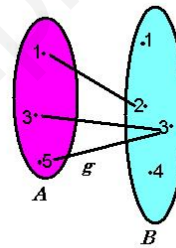
- El conjunto inicial es A .
- El conjunto original es $\{1, 5\} \subset A$.
- El conjunto final es B .
- El conjunto imagen es B .



Ejemplo 15: Ejemplo de aplicación:

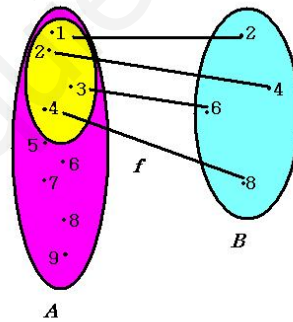
- La correspondencia $g = \{(1, 2), (3, 3), (5, 3)\}$, definida entre los conjuntos A y B del ejemplo 12 tiene la característica de que cada elemento de A sólo está como primer elemento en un par de g .
- La correspondencia g sí es aplicación.
- La correspondencia f del ejemplo 13 no es una aplicación.

B			
4			
3		(3,3)	(5,3)
2	(1,2)		
1			
	1	3	5
	A		



Ejemplo 16: Si A es el conjunto de números enteros positivos menores que 10, B es el conjunto de números enteros positivos pares menores que 10, y f la correspondencia de A en B que asigna su doble a cada elemento de A verifica:

- El **conjunto inicial** en la correspondencia f es A .
- El **conjunto original** en la correspondencia f es: $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$.
- El **conjunto final** en la correspondencia f es B .
- El **conjunto imagen** en la correspondencia f coincide con B .
- $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$



Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Describir por extensión el conjunto $A \times B$ siendo $A = \{casa, el, imagen\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 2: ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?

Ejercicio 3: La correspondencia f , entre los conjuntos A y B del ejercicio 1 anterior, que asigna a cada elemento de A el número de vocales que tiene. ¿Por cuántos pares está formada?

Ejercicio 4: ¿Es la correspondencia f una aplicación?

Ejercicio 5: ¿Coinciden en esta correspondencia los conjuntos inicial y original?

Ejercicio 6: ¿Coinciden en esta correspondencia los conjuntos final e imagen?

Ejercicio 7: ¿Se puede establecer una correspondencia g , entre los mismos conjuntos A y B para que coincidan los conjuntos final e imagen?

Ejercicio 8: ¿Y una aplicación para que coincidan los conjuntos final e imagen?

Ejercicio 9: ¿Es cierto que el conjunto imagen está contenido siempre en el conjunto final?

Ejercicio 10: ¿Puede ocurrir que el conjunto inicial no contenga al conjunto original?

Soluciones

Solución 1:

$$A \times B = \{(casa, 1), (casa, 2), (casa, 3), (casa, 4), (el, 1), (el, 2), (el, 3), (el, 4), (imagen, 1), (imagen, 2), (imagen, 3), (imagen, 4)\}.$$

Solución 2: 12 elementos.**Solución 3:** Por tres pares de $A \times B$.**Solución 4:** Sí.**Solución 5:** Sí.**Solución 6:** No.**Solución 7:** Sí: $g = \{(casa, 1), (casa, 2), (el, 1), (imagen, 3)\}$.**Solución 8:** No.**Solución 9:** Sí.**Solución 10:** No.

Autoevaluación ficha 4

Sabiendo que $A = \{\text{padre, hija, casilla, cosa}\}$, B es el conjunto de vocales del alfabeto español y f la correspondencia de A en B que asigna a cada palabra una vocal de B si contiene dicha vocal, responda a las siguientes cuestiones:

$A \times B = B \times A$.	Verdadero	Falso
El número de elementos de $A \times B$ es 16.	Verdadero	Falso
$f \subset A \times B$.	Verdadero	Falso
$A \times B \subset f$.	Verdadero	Falso
El grafo de f tiene 8 elementos.	Verdadero	Falso
(i, hija) es un elemento de f .	Verdadero	Falso
El conjunto inicial y conjunto original de f coinciden.	Verdadero	Falso
El conjunto final y conjunto imagen de f coinciden.	Verdadero	Falso
f es una aplicación.	Verdadero	Falso
f no es una aplicación porque ninguna de las palabras contiene la vocal “u”.	Verdadero	Falso

3.5. Ficha 5: Relaciones binarias

Entre los elementos de un conjunto se pueden establecer relaciones binarias.

- Una **relación binaria**, R , en un conjunto A es un subconjunto no vacío del producto cartesiano $A \times A$.
- Si (a, b) está en R , siendo a y b elementos de A , diremos que a **está relacionado** con b mediante la relación R .
Con frecuencia las relaciones tienen alguna de las siguientes propiedades:
- Una relación R es **reflexiva** en un conjunto A si cada uno de sus elementos está relacionado consigo mismo:

$$aRa, \forall a \in A$$

Si R es reflexiva en A cada elemento de su gráfico de flechas tiene un bucle.

- Una relación R es **antirreflexiva** en un conjunto A si ninguno de sus elementos está relacionado consigo mismo, es decir:

$$a \text{ no está relacionado con } a \text{ para ningún } a \in A$$

Si R es antirreflexiva en A ningún elemento de su gráfico de flechas tiene un bucle.

- Una relación R es **simétrica** en un conjunto A si ocurre:

$$aRb \Rightarrow bRa, \forall a, b \in A$$

Si R es simétrica en A cada flecha de ida va acompañada por la correspondiente de vuelta en el gráfico de flechas.

- Una relación R es **antisimétrica** en un conjunto A si:

Cuando a está relacionado con b , b no está relacionado con a si $a \neq b, a, b \in A$.

Si R es antisimétrica en A ninguna flecha de ida puede estar acompañada de otra de vuelta en su gráfico de flechas.

- Una relación R es **transitiva** en un conjunto A si ocurre:

$$\text{Si } aRb \text{ y } bRc \Rightarrow aRc, \forall a, b, c \in A$$

- Una relación R es de **equivalencia** en un conjunto A si es:

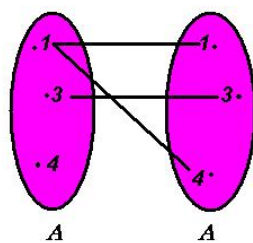
reflexiva, simétrica y transitiva

- Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , éste se puede dividir en conjuntos disjuntos tales que cada uno está formado sólo por elementos que están relacionados y se llama **clase de equivalencia**.
- El conjunto de las clases de equivalencia que ha determinado la relación R en el conjunto A se llama **conjunto cociente**: A/R .
- Una relación R es de **orden** en un conjunto A si es:

reflexiva, antisimétrica y transitiva

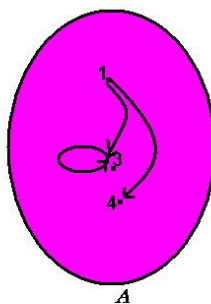
Ejemplo 18: Sean $A = \{1, 3, 4\}$ y R el subconjunto de $A \times A$, $R = \{(1, 3), (3, 3), (1, 4)\}$.

- Los pares de R indican que 1 está relacionado con 3 y con 4, y 3 está relacionado con 3.
- Es lo mismo que decir que hay una correspondencia entre A y A donde 1 tiene por imágenes 3 y 4, y la imagen e 3 es 3.



	A		
4	(1,4)	(3,4)	(4,4)
3	(1,3)	(3,3)	(4,3)
1	(1,1)	(3,1)	(4,1)
	1	3	4
	A		

- Por ser iguales los conjuntos inicial y final también se puede utilizar el siguiente diagrama:



Ejemplo 19: Sean $A = \{uno, dos, tres, eva\}$ y R la relación definida en A : “tiene el mismo número de letras”.

- Los pares que forman la relación R son:

$$\{(uno, uno), (uno, dos), (uno, eva), (dos, uno), (dos, dos), (dos, eva), (eva, uno), (eva, dos), (eva, eva), (tres, tres)\}$$

- R es reflexiva en A :

Los pares $(uno, uno), (dos, dos), (eva, eva), (tres, tres)$ son de R . En su gráfico de flechas cada elemento tiene un bucle.

- R es simétrica en A :

Son de R los pares

(uno, dos) y (dos, uno) ; (uno, eva) y (eva, uno) ; (dos, eva) y (eva, dos)

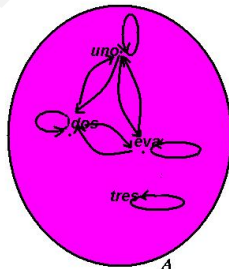
En su gráfico de flechas, éstas van en parejas de ida y vuelta.

- R es transitiva en A :

$$(uno, dos), (dos, eva) \in R \Rightarrow (uno, eva) \in R$$

$$(dos, eva), (eva, uno) \in R \Rightarrow (dos, uno) \in R$$

.....



	A			
tres				
eva				
dos				
uno				
	uno	dos	eva	tres
	A			

Ejemplo 20: La relación R “tener el mismo número de letras” en el conjunto del ejemplo anterior verifica:

- La relación R en A es de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva.
- Por ser R de equivalencia se puede dividir A en las siguientes clases:

$$\text{Clase 1} = \{\text{uno}, \text{dos}, \text{eva}\}$$

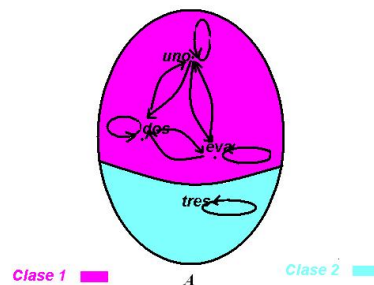
$$\text{Clase 2} = \{\text{tres}\}$$

Clase 1 está formado por los elementos de A que tienen tres letras.

Clase 2 está formado por los elementos de A que tienen cuatro letras.

- El conjunto cociente determinado en A por R es

$$A/R = \{\text{Clase 1}, \text{Clase 2}\}$$



Observación: Hay relaciones que no tienen ninguna de las propiedades citadas.

Ejemplo 21: Sea A la familia formada por $\{abuelo\ paterno, padre, madre, hijo1, hijo2\}$ en la que se define la relación R , “es padre de”.

- Los pares que forman la relación R son:

$$\{(abuelo\ paterno, padre), (padre, hijo1), (padre, hijo2)\}$$

- R es antirreflexiva en A :

En ningún par de R pueden ser iguales el primero y el segundo elementos.

En su gráfico de flechas ningún elemento tiene un bucle.

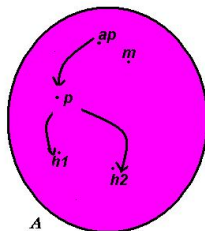
- R es antisimétrica en A :

Por ser $(abuelo\ paterno, padre), (padre, hijo1), (padre, hijo2)$ de R , no pueden serlo $(padre, abuelo\ paterno), (hijo1, padre), (hijo2, padre)$, respectivamente.

En su gráfico de flechas, no hay ninguna pareja de ida y vuelta.

- R no es transitiva en A :

$(abuelo\ paterno, padre), (padre, hijo1)$ son de R , pero $(abuelo\ paterno, hijo1)$ no puede serlo.



ap: abuelo paterno; p: padre; m: madre; h1: hijo 1; h2: hijo 2

A					
h2					
h1					
m					
p					
ap					
A					

ap: abuelo paterno; p: padre; m: madre; h1: hijo 1; h2: hijo 2

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: ¿Es de equivalencia la relación R : “*tener igual el primer apellido*” en el conjunto A de las personas inscritas en el Registro Civil como nacidas en Madrid el día 20 de abril de 2000?

Ejercicio 2: ¿Pertenece todos los elementos de A a alguna clase de equivalencia?

Ejercicio 3: Describa la clase a que pertenece Juan Pérez García sabiendo que pertenece al conjunto A .

Ejercicio 4: ¿Hay alguna clase de equivalencia que no tenga ningún elemento?

Ejercicio 5: ¿Tienen todas las clases el mismo número de elementos?

Ejercicio 6: ¿En qué se diferencia un elemento del conjunto cociente de otro?

Ejercicio 7: ¿Es R una relación de orden?

Ejercicio 8: ¿Se puede definir en un conjunto una relación simétrica y antisimétrica simultáneamente?

Ejercicio 9: Defina en el mismo conjunto una relación de orden.

Ejercicio 10: La relación que ha definido en el ejercicio 9, ¿permite formar clases de equivalencia en A ?

Soluciones

Solución 1: Sí.

Solución 2: Sí.

Solución 3: *Clase Pérez* = {personas cuyo primer apellido es Pérez y están inscritas en el Registro Civil como nacidas en Madrid el 20 de abril de 2000 }?.

Solución 4: No.

Solución 5: No.

Solución 6: En el primer apellido de las personas que la forman.

Solución 7: No.

Solución 8: No.

Solución 9: “haber nacido antes”.

Solución 10: No.

Autoevaluación ficha 5

Sabiendo que en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ se define la relación R : “*ser múltiplo de*”, responda a las siguientes cuestiones:

R es reflexiva.	Verdadero	Falso
El número de pares que forman R es 13.	Verdadero	Falso
R es simétrica.	Verdadero	Falso
R es $A \times A$.	Verdadero	Falso
R es transitiva.	Verdadero	Falso
R es una relación de equivalencia.	Verdadero	Falso
R es una relación de orden.	Verdadero	Falso
La relación R divide el conjunto dado en clases de equivalencia .	Verdadero	Falso
Conjunto cociente es un conjunto de clases de equivalencia.	Verdadero	Falso
Una relación puede ser de orden y de equivalencia simultáneamente.	Verdadero	Falso

SÍMBOLOS MÁS UTILIZADOS EN ESTE MÓDULO

\forall	Para todo
\exists	Existe
\in	Pertenece
$\{x/x \in A\}$	El conjunto de los elementos x que pertenecen a A
\subset	Contenido
\emptyset	Conjunto vacío
$A \cup B$	Unión de conjuntos
$A \cap B$	Intersección de conjuntos
\mathbb{N}	El conjunto de los números naturales
\mathbb{Z}	El conjunto de los números enteros
\mathbb{Z}^+	El conjunto de los números enteros positivos
\mathbb{Z}^-	El conjunto de los números enteros negativos
\mathbb{Q}	El conjunto de los números racionales
\mathbb{R}	El conjunto de los números reales

Índice alfabético

- Antirreflexiva, 44
- Antisimétrica, 45
- Aplicación, 35
- Clase de equivalencia, 45
- Complementario, 24
- Comprensión, 5
- Conjunto cociente, 45
- Conjunto final, 35
- Conjunto finito, 5
- Conjunto imagen, 35
- Conjunto inicial, 35
- Conjunto original, 35
- Conjunto potencia, 11
- Conjunto referencial, 11
- Conjunto universal, 11
- Conjunto vacío, 5
- Conjuntos anidados, 10
- Conjuntos disjuntos, 21, 23
- Conjuntos iguales, 10
- Contenido, 10
- Correspondencia, 35
- Diagramas de Venn, 5
- Diferencia de conjuntos, 23
- Diferencia simétrica, 25
- Estar relacionado, 44
- Extensión, 5
- Grafo, 35
- Intersección de conjuntos, 21
- Número de elementos del producto cartesiano, 35
- Número de subconjuntos, 11
- Partes de un conjunto, 11
- Producto cartesiano, 35
- Propiedad característica, 5
- Reflexiva, 44
- Relación binaria, 44
- Relación de equivalencia, 45
- Relación de orden, 45
- Simétrica, 44
- Subconjunto, 10
- Subconjuntos propios, 16
- Transitiva, 45
- Unión de conjuntos, 19