

Opción A

Modelo6 Ejercicio 1 Opción A sobrantes 1996

(a) (1'5 puntos]. Calcula, de manera razonada, todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifican

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) [1 punto]. Estudia la derivabilidad de cada una de las funciones f halladas.

Solución

a)

En todo \mathbb{R} tenemos $f(x)$ con $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Por el teorema fundamental del calculo integral que nos dice: Si $g(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces la función $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = g(x)$.

En nuestro caso tenemos $f(x) = \int f'(x)dx$

Si $x < 0$, $f(x) = \int f'(x)dx = \int e^x dx = e^x + K$

Si $x > 0$, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + H$

Como la función está definida en todo \mathbb{R} , las posibles funciones buscadas son $f(x) = \begin{cases} e^x + K & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + H & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

con K y H números reales cualesquiera. Como observamos cada rama de la función es continua.

La función $f(x)$ está definida en $x = 0$, pero no nos han dicho que sea continua en $x = 0$ por tanto no sé la relación que puede existir entre las constantes H y K

b)

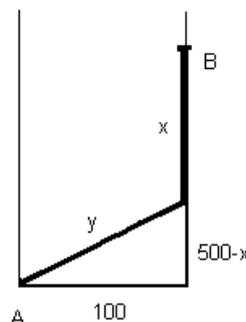
La derivabilidad de todas las funciones $f(x)$ ya me la han dado, y es $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ con lo cual lo

único que sabemos es que no está definida en $x = 0$, es decir no existe $f'(0)$ lo cual no implica que no sea continua en 0 , pero no lo sabemos porque no nos lo han dicho.

Modelo6 Ejercicio 2 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos]. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta y a 500 metros río arriba se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta eléctrica y la fabrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 1.200 ptas. el metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 2.000 ptas. el metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

Solución



Coste = $C = 2000y + 1200x$

Relacion $y^2 = 100^2 + (500 - x)^2$, de donde $y = +\sqrt{100^2 + (500 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 1000x + 260000}$

Sustituyendo $C(x) = (2000) \cdot \sqrt{x^2 - 1000x + 260000} + 1200x$

Derivando tenemos $C'(x) = \frac{1000(-1000 + 2x)}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} + 1200$

Resolviendo la ecuación $C'(x) = 0$ se obtiene $x = 425$ (El cálculo es largo y tedioso)

Calculamos $C''(x)$ para comprobar que es un mínimo ($C''(425) > 0$)

$$C''(x) = \frac{-500(-1000 + 2x)}{\sqrt{(x^2 - 1000x + 260000)^3}} + \frac{2000}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}}$$

Sustituyendo y operando obtenemos $C''(425) = 256/25 > 0$ con lo cual es un mínimo.

Sustituyendo $x = 425$ en $y = \sqrt{x^2 - 1000x + 260000}$, obtenemos $y = 125$, por tanto las longitudes que nos hacen mínimo el coste son $x = 425$ e $y = 125$ metros.

Modelo6 Ejercicio 3 Opción A sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. Discute el siguiente sistema según los valores del número real a :

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 1, \\ ay + 4z = 0, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$$

(b) [1 punto]. Resuélvelo para $a = -1$

Solución

a)

Dado el sistema

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 1, \\ ay + 4z = 0, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$$

su matriz de los coeficientes A y su matriz ampliada A^* son $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para estudiar la compatibilidad del sistema estudiamos el rango de su matriz de los coeficientes A y su matriz ampliada A^* .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+4) - 0 + 1(8-3a) = a^2 + a + 8$$

$\det(A) = 0$, nos da $a^2 + a + 8 = 0$ que no tiene soluciones reales (su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba que no corta nunca al eje de abscisas), por tanto el sistema dado es compatible y determinado sea cual sea el valor de "a", es decir y tiene solución única sea cual sea el "a".

b)

Lo resolvemos para $a = -1$

$$\begin{array}{lll} -x + 2y + 3z = 1 & -x + 2y + 3z = 1 & -x + 2y + 3z = 1 \\ -y + 4z = 0 & -y + 4z = 0 & -y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 & 3^aF + 1^aF(1) & 3^aF + 2^aF(1) \end{array} \quad 8z = 1, \text{ de donde}$$

$$z = 1/8, y = 4(1/8) = 1/2, y x = 2(1/2) + 3/8 - 1 = 3/8.$$

La solución es $(x,y,z) = (3/8, 1/2, 1/8)$

Modelo6 Ejercicio 4 Opción A sobrantes 1996

(a) [1'25 puntos]. Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por el punto $(1,1,1)$ y la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} y = 0, \\ 2x + 3z = 1. \end{cases}$$

(b) [1'25 puntos]. El mismo problema pero para la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

Solución

a)

Formamos el haz de planos que determina la recta $r \equiv \begin{cases} y = 0, \\ 2x + 3z = 1. \end{cases}$

$$(2x + 3z - 1) + a(y) = 0$$

Le imponemos la condición de que pase por el punto $(1,1,1)$

$(2 + 3 - 1) + a(1) = 0$, de donde $a = -4$ luego el plano que contiene al punto $(1,1,1)$ y a la recta "r" es el de ecuación $\pi \equiv 2x - 4y + 3z - 1 = 0$. Su vector normal es $\mathbf{n} = (2, -4, 3)$

La recta "t" pedida como es perpendicular a este plano tiene por vector director \mathbf{v} el vector normal del plano \mathbf{n} es decir $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (2, -4, 3)$ y pasa por el origen $O(0,0,0)$, por tanto su ecuación en forma continua es

$$x/2 = y/(-4) = z/3$$

b)

Formamos el haz de planos que determina la recta $s \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

$$(x + 2y + 3z - 6) + a(3x + 2y + z - 1) = 0$$

Le imponemos la condición de que pase por el punto (1,1,1)

$(1 + 2 + 3 - 6) + a(3 + 2 + 1 - 1) = 0$, de donde $0 + 5a = 0$, y por tanto $a = 0$, luego el plano que contiene al punto (1,1,1) y a la recta "s" es el de ecuación $\pi' \equiv x + 2y + 3z - 6 = 0$. Su vector normal es $\mathbf{n}' = (1, 2, 3)$

La recta "t'" pedida como es perpendicular a este plano tiene por vector director \mathbf{v}' el vector normal del plano \mathbf{n}' es decir $\mathbf{v}' = \mathbf{n}' = (1, 2, 3)$ y pasa por el origen $O(0,0,0)$, por tanto su ecuación en forma continua es $x/1 = y/2 = z/3$

Opción B

Modelo6 Ejercicio 1 Opción B sobrantes 1996

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función polinómica dada por $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80$.

(a) [1 punto]. Determina el intervalo $[a, b]$ en el que f es creciente.

(b) [1'5 puntos]. Calcula el área limitada por la parte de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$

Solución

a)

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80.$$

Vemos su monotonía estudiando su primera derivada $f'(x)$ y de ahí obtendremos el intervalo donde es creciente.

$$f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

De $f'(x) = 0$, obtenemos $-6x^2 + 30x - 24 = 0$, simplificando $x^2 - 5x + 4 = 0$ ecuación que tiene como soluciones $x = 1$ y $x = 4$.

Como $f'(0) = -24 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$

Como $f'(2) = 12 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(1, 4)$

Como $f'(5) = -99 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(4, \infty)$

La función $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80$ es creciente en el intervalo $[1, 4]$

b)

Como $f(1) = 13$, la función siempre es positiva en el intervalo $[1, 4]$ por tanto su área es:

$$\text{Área} = \int_1^4 (-2x^3 + 15x^2 - 24x + 80) dx = [-x^4/2 + 5x^3 - 12x^2 + 80x]_1^4 =$$

$$= (-128 + 320 - 192 + 320) - (-1/2 + 5 - 12 + 80) = 495/2 \text{ u}^2$$

Modelo6 Ejercicio 2 Opción B sobrantes 1996

De las siguientes afirmaciones, hechas sobre una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ¿cuáles DEBEN ser ciertas, PUEDEN ser ciertas en algunas ocasiones o NUNCA son ciertas? Justifica, las respuestas; en el caso de una respuesta "PUEDE" debes dar un ejemplo en el que la correspondiente afirmación sí es cierta y otro en el que no es cierta.

(a) [0'75 puntos]. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces $f(0) = 1$.

(b) [0'75 puntos]. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $f'(0) = 3$.

(c) [1 punto]. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $y = 3x + 1$ es la ecuación de, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

a)

Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces $f(0) = 1$

NUNCA es cierta porque si $f(x)$ es continua y $f(0) = 1$, tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ con lo cual resulta

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1/0 = \infty$$

b)

Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $f'(0) = 3$

CIERTA puesto que el límite que tengo es la definición de la derivada de $f(x)$ en $x = 0$, es decir $f'(0)$.

c)

Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $y = 3x + 1$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$

PUEDE ser cierta pues por el apartado b) sabemos que $f'(0) = 3$, y también sabemos que $f'(0)$ es la pendiente de la recta tangente, luego la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es:

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, es decir la recta tangente es $y = 3x + f(0)$, y en este apartado no me han dicho que $f(0)$ sea 1. Si $f(0)$ fuese 1 si sería cierta.

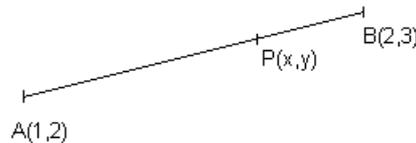
Modelo6 Ejercicio 3 Opción B sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. En el segmento cuyos extremos son los puntos $A = (1,2)$ y $B = (2,3)$ hay un punto P tal que la relación que existe entre los vectores \mathbf{PA} y \mathbf{PB} es la siguiente: $\mathbf{PA} = 3/2\mathbf{PB}$ Halla P .

(b) [1 punto]. Halla la ecuación de la circunferencia con centro en P y que pasa por el origen de coordenadas.

Solución

a)



$$\mathbf{PA} = (3/2)\mathbf{PB}$$

$$(1 - x, 2 - y) = (3/2)(2 - x, 3 - y)$$

$$(2 - 2x, 4 - 2y) = (6 - 3x, 9 - 3y) \text{ Igualando miembro a miembro}$$

$$2 - 2x = 6 - 3x$$

$$4 - 2y = 9 - 3y$$

Resolviendo este sistema obtenemos $x = 4$ e $y = 5$, luego el punto buscado es $P(4,5)$

b)

La ecuación de la circunferencia con centro en $P(4,5)$ y que pasa por el origen de coordenadas $O(0,0)$, tiene

$$\text{de centro } P(4,5) \text{ y de radio } r = d(O,P) = \|\mathbf{OP}\| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$\text{La ecuación de la circunferencia es } (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 41$$

Modelo6 Ejercicio 4 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo del pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilo del pienso B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% del de carbohidratos. Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos kilos diarios de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

Solución

	Proteinas	Carbohidratos
A	6%	14%
B	35%	15%

x = Kilogramos de A

y = Kilogramos de B

El sistema que nos queda es

$$6x + 35y = 100$$

$$14x + 15y = 100$$

Resolviéndolo queda $x = 5$ e $y = 2$