Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$I = \int [\ e^x / (e^{2x} +3e^x +2)\ ]\ dx$ Nos dan el cambio $t = e^x$, luego $dt = e^x\ dx$, y sustituyendo nos queda

$I = \int dt /(t^2 +3t + 2)$, que es una integral racional. Descomponemos en factores simples el denominador

$1/(t^2 +3t + 2) = A/(t+1) + B/(t+2) = [\ A(t+2) + B(t+1)\ ] / [(t+1)(t+2)]$. Igualando numeradores tenemos

$1 = A(t+2) + B(t+1)$

Para $t = -1$, tenemos $1 = A.1$, de donde $A = 1$

Para $t = -2$, tenemos $1 = - B$, de donde $B = - 1$

Luego

$I = \int dt /(t^2 +3t + 2) = \int [\ A/(t+1) + B/(t+2)\ ]\ dt =$

$= \int [\ 1/(t+1) + (-1) / (t+2)\ ]\ dt = 1.\ln|t+1| - 1.\ln|t+2| = \ln|(t+1)/(t+2)| =$

Quitando el cambio

$= \ln|(e^x+1)/(e^x +2)|$. Por tanto

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \left[\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)\right]_0^1 = [\ (\ \ln\{ (e^1+1)/(e^1 +2) \}\ ) - (\ \ln\{ (e^0+1)/(e^0 +2) \}\ )\ ]$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f : [0,5] \rightarrow R$ dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$

es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

Solución

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Es derivable en (0,5), luego es continua en (0,5). En concreto existe f '(2), es continua en x = 2, y además f(0) = f(5)

$$f\ '(x)=\begin{cases} x+2bx & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 \le x<5 \end{cases}$$

$0 = f(0) = f(5) = c + \sqrt{5-1}$, es decir

$0 = c + 2$, de donde $c = -2$

f(x) es continua en x = 2 tenemos $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$

De $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} (\ c + \sqrt{x-1}\ ) = c + 1 = -2 + 1 = -1$

De $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (\ ax + bx^2) = 2a + 4b$

Igualando tenemos $- 1 = 2a + 4b$

Como existe f '(2), tenemos que $f\ '(2^-) = f\ '(2^+)$

$f\ '(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f\ '(x) = \lim_{x\to 2} (a + 2bx) = a + 4b$

$f\ '(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f\ '(x) = \lim_{x\to 2} (1 / 2\sqrt{x-1}\ ) = ½$.

Igualando tenemos ½ =a + 4b. Tenemos

$- 1 = 2a + 4b$

$½ = a + 4b$

Resolviendo este sistema obtenemos $a = -3/2$ y $b = ½$.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Halla el punto Q simétrico del punto P = (2,0,1) respecto de la recta r que pasa por el punto A=(0,3,2) y es paralela a la recta s de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB.

(b) [1 punto] Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2, 2, 2)

Solución

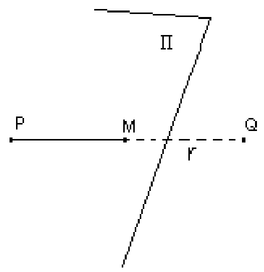
La recta r que es paralela a la recta s tiene como vector director el de la recta s

Tomando $y = \lambda$, la recta s en vectorial es $(x,y,z) = (-2\lambda, \lambda, 0)$ por tanto un vector director es $\mathbf{v} = (-2,1,0)$

La recta r pasa por el punto A(0,3,2) y tiene como vector director $\mathbf{v} = (-2,1,0)$, luego su ecuación en vectorial es

$r \equiv (x,y,z) = (-2\lambda, 3+\lambda, 2)$

Para hallar el simétrico del punto P(2,0,1) respecto de la recta r, calculamos el plano Π que pasa por P y es perpendicular a r (n su vector normal **n** será el director de r **v**), determinamos el punto de corte de dicho plano Π con la recta r (el punto M), y M será punto medio del segmento PQ, siendo Q el punto simétrico buscado



El plano Π tiene como punto P(2,0,1) y vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (-2,1,0)$, su ecuación es

$\Pi \equiv -2(x-2) +1(y-0) +0(z-1) = -2x +y +4 = 0$

El punto M intersección de r con Π

$-2(-2\lambda) + (3+\lambda) + 4 = 0$, de donde $\lambda = -7/5$, y $M(-2(-7/5), 3+(-7/5), 2) = M(14/5, 8/5, 2)$

M es el punto medio de P(2,0,1) y del simétrico Q buscado

$(14/5, 8/5, 2) = [(2+x)/2, (0+y)/2, (1+z)/2]$, de donde $x = 18/5$, $y = 16/5$ y $z = 3$, por tanto el simétrico es Q(18/5, 16/5, 3).

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de 1999.

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1'5 puntos] Determina si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa.

(b) [1 punto] Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

Solución

(a)

Existe A^{-1} si y solo si $|A| \neq 0$

Como $|B| = 0$, por tener una fila de ceros, no existe B^{-1}

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}= -1 -2 = -3 \neq 0, \text{ por tanto existe } A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t);\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad Adj(A^t)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$BA - A^2 = AB - X$, de donde $X = A^2 +AB - BA$

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad A.B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B.A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Dos partículas A y B se mueven en el plano XOY. En cada instante de tiempo t las posiciones de las partículas son, respectivamente A(½(t –1), $\sqrt{3}$ /2(1 – t)) y B = (2 – t, 0).
Determina el instante t_o en el que las partículas están más próximas entre sí y a qué distancia se hallan una de otra en ese instante.

Solución

Nos piden hacer mínima la distancia d(A,B) = |**AB**|
AB = (2 – t – 1/2t – ½, - $\sqrt{3}$ /2 + $\sqrt{3}$ /2.t) = (3/2(-t+1), $\sqrt{3}$ /2(t-1))

$$d(A,B)=\sqrt{\frac{9}{4}(-t+1)^2+\frac{3}{4}(t-1)^2}$$

Calculamos su primera derivada y la igualamos a cero y nos dará el mínimo

$$d'=\frac{18/4(-t+1)(-1)+3/4(t-1)}{2\sqrt{9/4(-t+1)^2+3/4(+-1)^2}}$$

Igualando d ' = 0, obtenemos (t – 1).(9/2 + ¾) = 0, de donde t =1, que es el instante en el que están más próximas entre si.
Si sustituimos en d(A,B), la distancia es cero, pues los dos sumandos que hay dentro de la raíz son cero.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de 1999.

(a) [1 punto] Calcula la integral $\int \frac{sen(x)}{(cos(x))^3}dx$

Realizando el cambio de variable cos(x) = t
(b) [1 punto] Calcula la misma integral que en el apartado anterior pero haciendo el cambio de variable tg(x) = u
(c) [0'5 puntos] ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos? Justifica la respuesta..

Solución

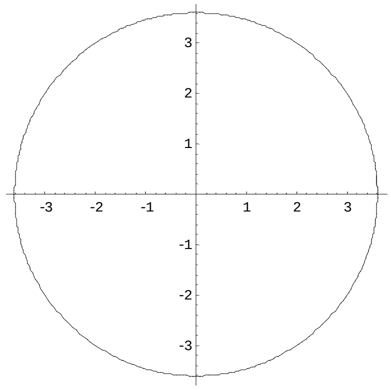
(a)
I = $\int$ [sen(x) / $(cos(x))^3$] dx con el cambio cos(x) = t; -sen(x) dx = dt
I = $\int$ [sen(x) / $(cos(x))^3$] dx = $\int$ (-dt / t^3) = -$\int t^{-3}$ dt = - t^{-2} / (-2) = 1 / $2t^2$ = (quitando cambio) =
= 1 / $2(cos(x))^2$ + K
(b)
I = $\int$ [sen(x) / $(cos(x))^3$] dx con el cambio tan(x) = u; [1 / cos^2 (x)]dx = du
I = $\int$ [sen(x) / $(cos(x))^3$] dx = $\int$ [{sen(x)/cos(x)}.{dx/cos^2(x)}] = $\int$ u.du = u^2/2 = (quitando cambio) =
= (tan^2(x))/2 + M
(c)
El resultado que se obtiene es el mismo pues hay que tener en cuenta que dos primitivas se diferencian en una constante, es decir
1 / [$2cos^2$(x)] = ½ tan^2(x) + K = [sen^2(x) / $2cos^2$(x)] + K
1 = sen^2(x) + $2Kcos^2$(x)
1 - sen^2(x) = $2Kcos^2$(x)
cos^2(x) = $2Kcos^2$(x)
De donde K = ½ (también sale cos(x) = 0)

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de 1999.

Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$
(a) [1'5 puntos] Represéntala indicando su centro y su radio
(b) [2 puntos] Halla el área de la figura limitada por las tres rectas siguientes:
(i) la recta tangente a la circunferencia en el punto A = (3,2)
(ii) la recta normal a la circunferencia en el punto A .
(iii) el eje de abcisas

Solución

(a)



Su centro es el punto (0,0) y su radio es $\sqrt{13}$

(b)

La recta tangente en el punto A(3,2) es y – 2 = y '(3,2). (x – 3)

Hallamos la derivada implícita y calculamos el valor y '(3,2).

$x^2 + y^2 = 13$

Derivando en forma implícita

2x + 2y.y ' = 0, de donde y ' = -2x / 2y = -x / y. Por tanto

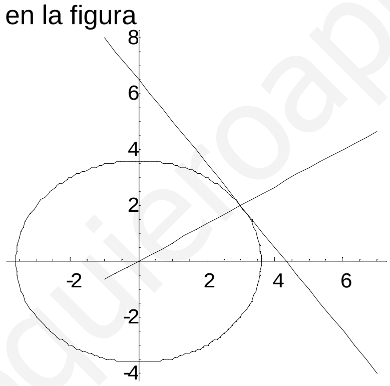
y '(3,2) = -3 / 2, y la recta tangente en A(3,2) es

y – 2 = -3/2(x – 3). Operando se obtiene y = -3/2x + 13/2

La pendiente m de una recta y la de su normal m ', verifican que m.m' = -1, por tanto la ecuación de la recta normal en el punto A(3,2) es

y – 2 = 2/3(x – 3)., y operando se obtiene y = 2/3x

Para hallar el área pedida nos fijamos en la figura



y lo que nos piden es el área del triángulo formado por la recta normal, la recta tangente y el eje de abcisas, pero

Área = 1/2base.altura = ½ (corte de la tangente con abcisas, que es 13/3 {hacer y = 0, en la tangente}).(la ordenada del punto A que es 2), luego

Area = ½.(13/3).2 = 13/3 u.a.

Este resultado también se puede obtener integrando, es decir

$$\text{Area}=\int_0^3 (2/3x)\,dx+\int_3^{13/3}(-3/2x+13/2)\,dx=13/3 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de 1999.

(a) [1'5 puntos] El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

(b) [1 punto] Determina todos los valores de a para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

Solución

(a)

Tomando a = 3. vemos que la tercera columna es suma de la primera y la segunda, y por tanto al depender linealmente el determinante vale cero

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3^2 & 13 \\ 8 & 3^3 & 35 \end{vmatrix}=0$$

(b)

$$0=\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}=2a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & a & 13 \\ 4 & a^2 & 35 \end{vmatrix}=2a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 0 & a^2-4 & 15 \end{vmatrix}=2a[15(a-2)-3(a^2-4)] = 2a[15(a-2) - 3(a-2)(a+2)] =$$

$$= 2a[(a-2)(15-3(a+2))] = 2a(a-2)(9-3a)$$

Por tanto este determinante vale cero si y solo si a = 0, a = 2 y a = 3