PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA CURSO 1998-1999.

Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 1 de 1999.

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x.\text{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

(b) [1'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)dx$

Solución

(a)

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x.\text{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \text{sen}(x) + x\cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Veamos si existe f '(0), para lo cual tiene que darse $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} (\text{sen}(x) + x\cos(x)) = 0$

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0} (1) = 1$

Como $f'(0^+) \ne f'(0^-)$, no existe f '(0).

(b)

Para calcular $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)dx$, realizamos primero la integral por partes

$\int x\text{sen}(x)\, dx$, para lo cual tomamos u = x, dv = sen(x)dx, de donde du = dx y v =$\int \text{sen}(x)\, dx = -\cos(x)$, luego

$\int x\text{sen}(x)\, dx = x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\, dx = -x\cos(x) + \text{sen}(x)$

$$\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2f(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 2f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2xdx + \int_{0}^{\pi/2} 2x\text{sen}(x)dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + 2\left[-x\cos(x) + \text{sen}(x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$= [(0) – (1)] + 2.[((-\pi/2).0 + 1) – (0+0)] = -1+2 = 1$

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 1 de 1999.

Sea k un número real y sea f : R → R la función definida por f(x) = cos(x) + kx

(a) [1'25 puntos] Determina todos los valores de k para los que la función anterior es creciente en todo su dominio.

(b) [1'25 puntos] Para k = 1 halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abcisa x = 0.

Solución

(a)

La función f(x) es creciente si y solo si f '(x) > 0

f(x) = cos(x) + kx

f '(x) = -sen(x) + k ≥ 0, es decir sen(x) ≤ k. Como sen(x) ∈ [-1,1], tomando k ≥ 1 la función f(x) es creciente pues sen(x) ≤ k (con k ≥ 1)

(b)

Si k = 1, f(x) = cos(x) + x, f '(x) = -sen(x) + 1.

La ecuación de la recta tangente en x = 0 es y – f(0) = f '(0).(x – 0)

f(0) = cos(0) + 0 = 1; f '(0) = -sen(0) + 1 = 1, luego la recta tangente es y = x + 1

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 1 de 1999.

Sea Π el plano que pasa por los puntos M = (1,0,0), B = (0,1,1) y C = (1, 1,1). Sea A el punto (1, 2, 3) y sea B el simétrico de A respecto del plano π

(a) [1'5 puntos] Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB.

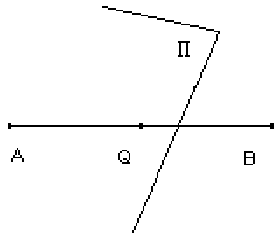
(b) [1 punto] Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2, 2, 2)

Solución

(a)

Calculamos el plano π que pasa por los puntos M, B y C para lo cual tomamos como punto el M=(1,0,0), y como vectores paralelos **v** = **MB** = (-1,1,1) y **w** = **MC** = (0,1,1)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(0) - (y-0)(-1) + (z-0)(-1) = y - z = 0$$



Para calcular el simétrico de A(1,2,3) respecto del plano π, calculamos la recta r perpendicular a π por el punto A, y hallamos Q como intersección del plano π con la recta r

r tiene como punto A(1,2,3) y como vector director **w** = **n** = (0,1,-1) el normal del plano Π. Su ecuación vectorial es

$r \equiv (x,y,z) = (1, 2+\lambda, 3-\lambda)$

$Q = r \cap \pi$

$(2+\lambda) - (3-\lambda) = 0$, operando sale $\lambda = 1/2$, y el punto Q es

Q(1, 2+1/2, 3-1/2) = Q(1,5/2,5/2)

El punto Q(1,5/2,5/2) es el punto medio del segmento AB, siendo B el punto simétrico buscado, luego

(1,5/2,5/2) = [(1+x)/2, (y+2)/2, (z+3)/3], de donde x = 1, y = 3 y z = 2

El simétrico es B(1,3,2)

La recta que me piden es la r que ya la he calculado $r \equiv (x,y,z) = (1, 2+\lambda, 3-\lambda)$

Un vector directo suyo es **v** = (0,1,-1)

(b)

La recta s paralela a la anterior y que pasa por el punto (2,2,2), tiene como vector director el **v**, por tanto su ecuación es

$s \equiv (x,y,z) = (2, 2+\lambda, 2-\lambda)$

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 1 de 1999.

[2'5 puntos] Sea A la matriz dada por $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$. Halla a, b, c y d sabiendo que:

(i) El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1, -1, 1)

(ii) El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de A por el vector (1, 0, 1) es el vector (-2, 3, 2)

(iii) El rango de la matriz A es 2.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Como (1,2,C) es ortogonal a (1,-1,1) su producto escalar es cero y obtenemos 1 – 2 + c = 0, de donde c = 1

(b)

Como el producto vectorial de (-7,b,d) por el vector (1,0,1) es (-2,3,2) tenemos

$(-2,3,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & b & d \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(b) - \mathbf{j}(-7-d) + \mathbf{k}(-b) = (b, 7+d, -b)$ de donde igualando obtenemos b = -2 y d = -4

(c)

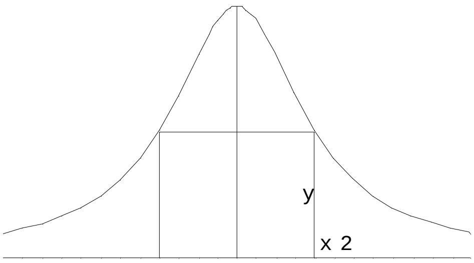
Como el rango(A) = 2 su determinante es cero, luego

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & -2 \\ 1 & -a & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & a-6 & 12 \\ 0 & -a-3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot[(3a-18) + (12a+36)] = 15a + 18 = 0$, de donde a = -18/15

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 1999.

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos inscritos, como indica la figura, entre la gráfica de la función $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = 1/(1 + x^2)$ y el eje OX, halla el de mayor área.



Solución

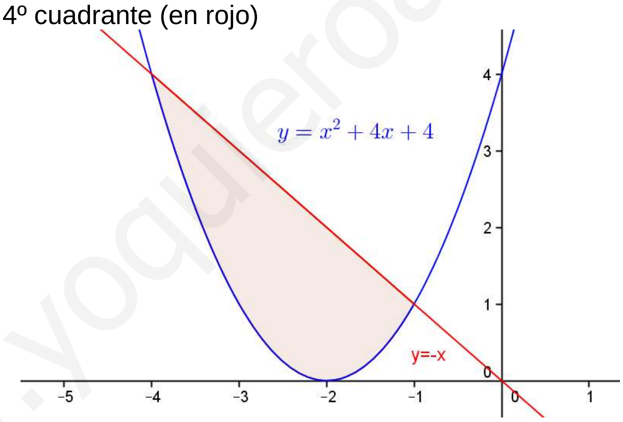
La función a maximizar es A = x.y, donde x es la base del rectángulo e y su altura es y que es
$f(x/2) = [\ 1 / (\ 1 + (1/2)^2\ )\ ] = 4 / (4 + x^2)$
Luego la funcion es $A = x.y = 4x / (4 + x^2)$
$A' = [\ 4(4+x^2) - 4x(2x)\ ] / [\ (4 + x^2)^2\ ] = (16-4x^2) / (4+x^2)^2$.
$A' = 0$, nos da $16-4x^2 = 0$, de donde $x = \pm 2$
Se calcula A '' y nos sale
$A'' = [\ 4x(4+x^2)(3x^2-24)\ ] / (4+x^2)^4$. y sustituyendo x = 2 y x = -2., vemos cual es el máximo y el mínimo
Como A '' (2) < 0, x = 2 es máximo. En este caso x = 2, e $y = 4 / (4 + x^2) = 4 / (4+4) = ½$, es decir el rectángulo tienen de base x = 2, y de altura y = ½
Como A ''(-2) > 0, en x = -2 hay un mínimo.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 1999.

[2'5 puntos] Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la recta y + x = 0 y la curva de ecuación $y = x^2 + 4x +4$.

Solución

$y = x^2 + 4x +4 = (x + 2)^2$, luego es una parábola igual que x^2 pero desplazada dos unidades hacia la izquierda en abcisas (en azul)
y = - x es la bisectriz del 2º y 4º cuadrante (en rojo)



Para calcular el área encerada en el recinto calculamos los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de $x^2 + 4x + 4 = - x$, es decir $x^2 + 5x + 4 = 0$. Sus soluciones son x = -1 y x = -4

$$\text{Area} = \int_{-4}^{-1}(-x-x^2-4x-4)dx = \int_{-4}^{-1}(-x^2-5x-4)dx = \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_{-4}^{-1} =$$

$= [\ (1/3 - 5/2 + 4) - (4^3/3 - (5.16/2) + 16)\ ] = 9/2$ u.a.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 1999.

(a) [1'5 puntos] Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$x + y + bz = b^2$$
$$-x + y + bz = -3$$
$$bx + y + bz = 3b$$

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

Solución

(a)
La matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada A* son

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & b \\ b & 1 & b \end{pmatrix} \quad y \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ -1 & 1 & b & -3 \\ b & 1 & b & 3b \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$, por lo menos rango(A) = 2

Para que rango(A) = 3, tiene que ser $|A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix}1&1&b\\-1&1&b\\b&1&b\end{vmatrix} = 0$, por tener dos columas proporcionales, luego rango(A) = 2 sea cual sea el valor de "b".

En A* tenemos $\begin{vmatrix}1&1&b^2\\-1&1&-3\\b&1&3b\end{vmatrix}\begin{matrix}\\F_2-F_1\\F_2-F_1\end{matrix} = \begin{vmatrix}1&1&b^2\\-2&0&-3-b^2\\b-1&0&3b-b^2\end{vmatrix}\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\\text{segunda}\\\text{columna}\end{matrix} = 1(-1)(-6b+2b^2+(3+b^2)(b-1)) =$

$= -1\cdot(-6b+2b^2+3b-3+b^3-b^2) = -b^3 - b^2 + 3b + 3$. Igualando a cero tenemos $b^3 + b^2 - 3b - 3 = 0$. Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & & -1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

De donde tenemos b = -1 y $b^2 - 3 = 0$, luego $b = \pm\sqrt{(3)}$.

Para **$b \neq -1$ y $b \neq \pm\sqrt{(3)}$**, rango (A*) = 3. Por el Teorema de Rouchè, como rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3, **el sistema es incompatible y no tiene solución**.

Si **$b = -1$ y $b = \pm\sqrt{(3)}$**, rango (A*) = 2. Por el Teorema de Rouchè, como rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**.

Lo resolvemos en este caso. Como el rango es 2 tomamos solo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que formamos el menor de orden 2 distinto de cero, y dos incógnitas principales.
Para no repetir 3 veces lo mismo dejamos "b" tal cual y se sustituye respectivamente por -1, $-\sqrt{(3)}$ y $+\sqrt{(3)}$.

$x + y + bz = b^2$
$-x + y + bz = -3$. Tomamos $z = \lambda \in R$, y sumamos ambas ecuaciones:
$2y + 2b\lambda = -3 + b^2$ de donde $y = (-3+b^2)/2 - b\lambda$. Entrando en la primera tenemos:
$x + ((-3+b^2)/2 - b\lambda) + b(\lambda) = b^2$, de donde $x = b^2 - (-3+b^2)/2 = b^2/2 + 3/2$

Solución del sistema $(x,y,z) = (b^2/2 + 3/2, (-3+b^2)/2 - b\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$ y b igual a -1, $-\sqrt{(3)}$ o $+\sqrt{(3)}$, es decir:
Si b = -1 solución $(x,y,z) = (2, -2 + \lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$
Si $b = -\sqrt{(3)}$ solución $(x,y,z) = (3, +\sqrt{(3)}\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$
Si $b = \sqrt{(3)}$ solución $(x,y,z) = (3, -\sqrt{(3)}\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$

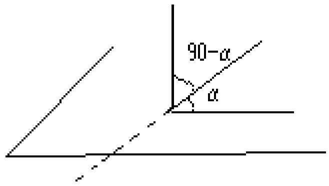
Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 1999.

Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector **v** = (1, 2, -1). En su movimiento dicho objeto pasa por el punto A = (2, 1, 2)
(a) [1 punto] Calcula los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados.
(b) [0'75 puntos] Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.
(c) [0'75 puntos] ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano XOY.

Solución

(a)
La ecuación de la recta r en vectorial es $r \equiv (x,y,z) = (2+\lambda, 1+2\lambda, 2-\lambda)$
La ecuación del plano coordenado XOY es z = 0, de donde $0 = 2 - \lambda$, obtenemos $\lambda = 2$ y el punto de corte de la recta con dicho plano es (4,5,0)
La ecuación del plano coordenado XOZ es y = 0, de donde $0 = 1 + 2\lambda$, obtenemos $\lambda = -1/2$ y el punto de corte de la recta con dicho plano es (3/2,0,3/2)
La ecuación del plano coordenado ZOY es x = 0, de donde $0 = 2 + \lambda$, obtenemos $\lambda = -2$ y el punto de corte de la recta con dicho plano es (0,-3 ,4)
(b)
El plano π perpendicular a r que pasa por (0,0,0) tiene como vector normal **n** = **v** = (1,2,-1) el director de la recta, luego su ecuación es
$\pi \equiv 1.(x-0) +2(y-0) -1(z-0) = x - 2y - z = 0$
(b)
El plano XOY tiene de ecuación z = 0, por tanto su vector normal es $\mathbf{n_z} = (0,0,1)$

El vector director de la recta es **v** = (1,2,-1), por tanto el ángulo que forma la recta con el plano es



cos(90 - α) = sen (α) = | (**v** • $\mathbf{n_z}$) / (|**v**|| $\mathbf{n_z}$ | | = |-1| /√(6), por tanto α = arsen (1 /√(6)) = 24º 5' 41,4''