

OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 2 de 2001.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |18 - x^2|$.

(a) [1 punto] Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).

(b) [1'5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.

Solución

$$(a) f(x) = |8 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ -(x^2 - 8) & \text{si } -\sqrt{8} \leq x < \sqrt{8} \\ x^2 - 8 & \text{si } x > \sqrt{8} \end{cases}$$

$8 - x^2 = 0$, las soluciones son $x = \pm\sqrt{8}$

Para $x < -\sqrt{8}$ y $x > \sqrt{8}$, $8 - x^2$ es mayor que cero, lo cual se comprueba sustituyendo un número cualquiera en $8 - x^2$. Para $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$, los valores de $8 - x^2$ son negativos

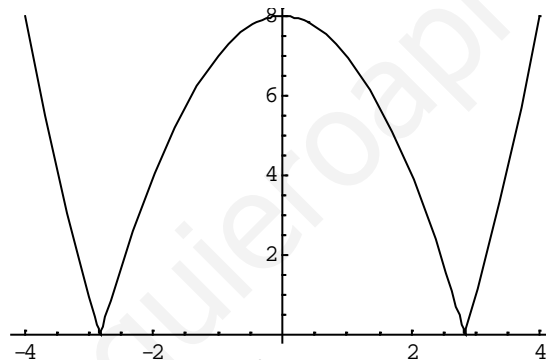
La gráfica de $8 - x^2$ es la misma que la de $-x^2$ pero desplazada 8 unidades hacia arriba en ordenadas.

La gráfica de $-(8 - x^2)$ es la simétrica de la de $8 - x^2$ respecto al eje OX.

$8 - x^2$ es una parábola con las ramas hacia abajo su extremo se encuentra en $f'(x) = 0$
 $-2x = 0$, $x = 0$ es la abscisa del máximo que vale 8

Como tenemos un valor absoluto los mínimos se encuentran en el eje OX en concreto en las abscisas que los anulan, en nuestro caso en $x = \pm\sqrt{8}$

La gráfica de la función es



(b) Recta tangente en $x = -2$. La rama es $f(x) = 8 - x^2$
 $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$; $f'(x) = -2x$; $f(-2) = 8 - (-2)^2 = 4$; $f'(-2) = -2(-2) = 4$
 $y - 4 = 4(x+2)$. Operando queda $y = 4x + 2$

El corte de la tangente $y = 4x + 2$ con $8 - x^2$ es $x = -2$. Faltan los cortes con $x^2 - 8$ para lo cual se resuelve la ecuación $x^2 - 8 = \text{tangente}$, es decir

$$x^2 - 8 = 4x + 2; x^2 - 4x - 20 = 0. \text{ Sus soluciones son } x = 2 \pm \sqrt{24}$$

La recta tangente $y = 4x + 2$ corta a la función $f(x) = |8 - x^2|$ en $x = -2$ y en $x = 2 \pm \sqrt{24}$

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 2 de 2001.

Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x , considera la función $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \text{Ln}(x)$. Calcula:

(a) [1'5 puntos] $\int f(x) dx$

(b) [1 punto] Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 0)$.

Solución

$$(a) \int x \text{Ln}(x) dx = \text{Ln}(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}(x) - \frac{1}{4} x^2 + K = F(x)$$

$$u = \text{Ln}(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

(b) Como pasa por $(1, 0)$ tenemos $F(1) = 0$, es decir $1/2 \cdot \text{Ln}(1) - 1/4 \cdot (1) + K = 0 \rightarrow K = 1/4$, por tanto

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + 1/4.$$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 2 de 2001.

[2'5 puntos] Sea $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x & 1 \end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A ? Calcula dicha matriz inversa.

Solución

Para que tenga inversa $|A| \neq 0$

$|A| = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$ luego exista la inversa de A para cualquier valor de x

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}(A^t); \quad A^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}(A^t) = 1/1 \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes de 2001.-

[2'5 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,0,-1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Solución

El plano pedido pasa por el punto $A(1,0,-1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{n} = (1,-1,2)$, que es el vector normal del plano, y al vector director de la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Tomando $y = \lambda$ la recta es $(x,y,z) = (2\lambda, \lambda, 0)$ y su vector director es $\mathbf{v} = (2,1,0)$

$$\text{El plano es } \pi \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{n}, \mathbf{v}| = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-2) - (y)(-4) + (z+1)(3) = -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 2 de 2001

[2'5 puntos] De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$. Halla la expresión de f .

Solución

$f''(x) = x^2 + 2x + 2$. Como tiene tangente horizontal en $P(1,2)$ tenemos que $f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral tenemos

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (x^2 + 2x + 2) dx = x^3/3 + x^2 + 2x + K$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 0 = 1/3 + 1 + 2 + K \rightarrow K = -10/3. \text{ Con lo cual } f'(x) = x^3/3 + x^2 + 2x - 10/3$$

Volviendo a aplicar el teorema fundamental del cálculo integral

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3/3 + x^2 + 2x - 10/3) dx = x^4/12 + x^3/3 + x^2 - (10/3)x + 2x + K$$

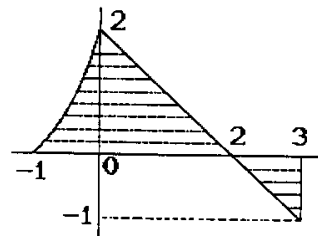
$$f(1) = 2 \rightarrow 2 = 1/12 + 1/3 + 1 - 10/3 + K \rightarrow K = 47/12.$$

$$\text{Con lo cual } f(x) = x^4/12 + x^3/3 + x^2 - (10/3)x + 2x + 47/12$$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 2 de 2001.

[2'5 puntos] Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva

tiene como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$

**Solución**

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por (0,2) y (2,0). La ecuación segmentaria es $x/2 + y/2 = 1$, de donde $x + y = 2$. Despejando $y = 2 - x$

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 \frac{2x+2}{1-x} dx + \int_0^2 (2-x) dx + \left| \int_2^3 (2-x) dx \right| = [-2x - 4\ln|1-x|]_{-1}^0 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_2^3 =$$

$$= (0 - 4\ln(1)) - (2 - 4\ln(2)) + [(4 - 2) - 0] + |(6 - 9/2) - (4 - 2)| = 4\ln(2) + 1/9 \text{ u.a.}$$

$$I = \int \frac{2x+2}{1-x} dx = \int \left[-2 + \frac{4}{1-x} \right] dx = -2x + 4\ln|1-x|(-1) = -2x - 4\ln|1-x|$$

$$\frac{2x+2}{-2x+2} \frac{1-x}{-2}$$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 2 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula a sabiendo que los planos $ax + y - 7z = -5$ y $x + 2y + a^2z = 8$, se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0, 2, 1)$ pero que no pasa por el punto $B(6, -3, 2)$.

Solución

Para que los planos formen una recta el determinante $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, es decir $2a - 1 \neq 0$, lo que nos da $a \neq 1/2$

Como $(0, 2, 1)$ pertenece a la recta tenemos $\begin{cases} 0 + 2 - 7 = -5 \\ 0 + 4 + a^2 = 8 \end{cases}$, de donde $a^2 = 4$, luego $a = \pm 2$

Como $(6, -3, 2)$ no pertenece a la recta tenemos $\begin{cases} 6a - 3 - 14 \neq -5 \\ 6 - 6 + 2a^2 \neq 8 \end{cases}$, por tanto a la vez tenemos que $a \neq 2$ y

$a \neq \pm 2$. Luego tiene que ser $a \neq +2$

Como a la vez $a = \pm 2$ y $a \neq +2$, la única posibilidad que nos queda es que $a = -2$.

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes de 2001.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3 , prueba que $A^3 + I = O$,

(b) [1'5 puntos] Calcula A^{10} .

Solución

$$(a) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto } A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

$$(b) A^{10} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A = (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$