Opción A

Modelo5 Ejercicio 1 Opción A sobrantes 1996

Sea f : [-4,2] $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^x$
(a) [1 punto]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(b) [1'5 puntos]. Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

Solución

a)
f : [-4,2] $\rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^x$
Para ver el crecimiento y decrecimiento estudiamos la primera derivad f '(x)
$f'(x) = 2xe^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$
f '(x) = 0, no dá $(2x + x^2) = 0$ puesto que e^x nunca se anula al ser una exponencial

De $2x + x^2 = 0 = x(2 + x)$ obtenemos x = 0 y x = -2 que son los posibles máximos o mínimos relativos
Como f '(-3) = (+)(-6+9) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (-4,-2)
Como f '(-1) = (+)(-2+1) < 0, f(x) es estrictamente decreciente en (-2,0)
Como f '(+1) = (+)(2+1) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (0,2)
Por definición x = -2 es un máximo relativo y x = 0 es un mínimo relativo
b)
Ya sabemos que x = -2 es un máximo relativo que vale $f(-2) = 4.e^{-2} \cong 0'54$
Análogamente x = 0 es un mínimo relativo que vale f(0) = 0.1 = 0

Los máximos y mínimos absolutos se encuentran en las soluciones de f '(x) = 0, los extremos del intervalo, y los puntos de discontinuidad y no derivabilidad que no hay ninguno pues la función dada es continua y derivable en todo $\Re$ por producto de continuas y derivables, en concreto x^2 y e^x. Por tanto los posibles máximos o mínimos absolutos se encuentran en las abscisas -4, -2, 0 y 2. El valor mas grande será el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

$f(-4) = 16.e^{-4} \cong 0'29$
$f(-2) = 4.e^{-2} \cong 0'54$
$f(0) = 0.1 = 0$
$f(2) = 4.e^{2} \cong 29'56$

Por tanto el mínimo absoluto es 0 y se alcanza en x = 0 y el máximo absoluto es $4.e^2$ y se alcanza en x = 2.

Modelo5 Ejercicio 2 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos] Sabiendo que $\int_{+1}^{+5} f(x)\,dx = 3$, $\int_{+1}^{+5} g(x)\,dx = 3$, $\int_{+1}^{+3} f(x)\,dx = 3$, $\int_{+3}^{+5} g(x)\,dx = 3$, calcula

$\int_{+3}^{+5} [\,f(x) +3g(x)\,]\,dx - \int_{+1}^{+3} [\,3f(x) + g(x)]\,dx$.

Solución

Conocemos $\int_{+1}^{+5} f(x)\,dx = 3$, $\int_{+1}^{+5} g(x)\,dx = 3$, $\int_{+1}^{+3} f(x)\,dx = 3$, $\int_{+3}^{+5} g(x)\,dx = 3$

Por las propiedades de las integrales $\int_{+1}^{+5} f(x)\,dx = \int_{+1}^{+3} f(x)\,dx + \int_{+3}^{+5} f(x)\,dx$. Sustituyendo tenemos

$3 = 3 + \int_{+3}^{+5} f(x)\,dx$, de donde $\int_{+3}^{+5} f(x)\,dx = 0$

Por las propiedades de las integrales $\int_{+1}^{+5} g(x)\,dx = \int_{+1}^{+3} g(x)\,dx + \int_{+3}^{+5} g(x)\,dx$. Sustituyendo tenemos

$3 = \int_{+1}^{+3} g(x)\,dx + 3$ de donde $\int_{+1}^{+3} g(x)\,dx = 0$

Respondemos ya a la pregunta formulada

$\int_{+3}^{+5} [\,f(x) +3g(x)\,]\,dx - \int_{+1}^{+3} [\,3f(x) + g(x)]\,dx =$

$= \int_{+3}^{+5} f(x)dx + 3\int_{+3}^{+5} g(x)dx - 3\int_{+1}^{+3} f(x)dx - \int_{+1}^{+3} g(x)]\,dx = 0 + 3(3) - 3(3) - 0 = 0$

Modelo5 Ejercicio 3 Opción A sobrantes 1996

Sean S y S' dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.
(a) [1 punto]. Justifica con un ejemplo que S puede ser compatible y S' incompatible
(b) [1 punto]. Si los dos sistemas S y S' son compatibles, ¿puede S tener solución única y S' tener infinitas soluciones? Razona la respuesta.
(c) [0'5 puntos] Al resolver un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas mediante el método de eliminación de Gauss, obtenemos la siguiente matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

¿Qué puedes decir de dicho sistema? Razona la respuesta.

Solución

a)
El sistema $S \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ y el sistema $S' \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ tienen ambos la misma matriz de los coeficientes, sin embargo el sistema S es compatible e indeterminado y el S' es incompatible.
b)
Si S y S' son compatibles tenemos que rango(A) = rango(A^*) = rango(A') = rango(A^{*}'), siendo A y A^* la matriz de los coeficientes y ampliada del sistema S, y A' y $A^{*'}$ la matriz de los coeficientes y ampliada del sistema S', por tanto ambos tendrán solución única o tendrán infinitas soluciones
c)
Observando la 4ª fila nos da lugar a la ecuación 0.z = 1, es decir 0 = 1 lo cual es imposible y el sistema es incompatible.

Modelo5 Ejercicio 4 Opción A sobrantes 1996

El ángulo entre dos vectores **u** y **v** es de 120º y se sabe que el módulo de **u** es 5 y el de **v** es 3.
(a) [1'5 puntos]. Determina el valor del número real α para el que los vectores (**u** - **v**) y (α**u** + **v**) son ortogonales.
(b) [1 punto]. ¿Cuánto vale el módulo de **u** - **v**?

Solución

a)
||**u**|| = 5; ||**v**|| = 3; (**u**,**v**) = 120º
u•v = ||**u**||.||**v**||cos(**u**,**v**) = 5.3.cos(120º) = 15.(-1/2) = -15/2
u•u = ||**u**||.||**u**||cos(**u**,**u**) = 5.5.cos(0º) = 25.(1) = 25
v•v = ||**v**||.||**v**||cos(**v**,**v**) = 3.3.cos(0º) = 9.(1) = 9

Si los vectores (**u** - **v**) y (α**u** + **v**) son ortogonales, su producto escalar es cero
(**u** - **v**) • (α**u** + **v**) = α **u•u** + **u•v** - α **u•v** - **v•v** = 0 = α(25) – 15/2 - α(-15/2) – 9. Operando nos queda -33/2 + (65/2)a = 0 cuya solución es a = 33/65
b)
(**u** - **v**) • (**u** - **v**) = **u•u** - 2**u•v** + **v•v** = 25 – 2(-15/2) + 9 = 49

$$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{49} = 7$$

Opción B

Modelo5 Ejercicio 1 Opción B sobrantes 1996

Sea f la función definida por f(x) = $\dfrac{3}{x^2-4}$ para x ≠ 2 y x ≠ - 2
(a) [1 punto]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(b) [1'5 puntos]. Teniendo en cuenta cómo es la función en el intervalo [3, 4] demuestra, sin calcular la integral, que se cumple 1/4 ≤ $\int_{+3}^{+4}$ f(x) dx ≤ 3/5

Solución

a)
f(x) = $\dfrac{3}{x^2-4}$ para x ≠ 2 y x ≠ - 2
Para estudiar su monotonía estudiamos su primera derivada f '(x)

f '(x) = $\frac{-6x}{(x^2-4)^2}$; f '(x) = 0 de donde x = 0 que será el posible máximo o mínimo relativo
Como f '(-1) = (6)(+) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (-∞,0) – {-2}
Como f '(+1) = (-6)(+) < 0, f(x) es estrictamente decreciente en (0,+ ∞) – {+2}
Por definición x = 0 es un máximo relativo.
Esta función tiene dos asíntotas verticales precisamente en x = 2 y x = - 2
b)
El Teorema del valor medio para las integrales nos dice que si f(x) es continua en el intervalo [a,b] entonces
m(b-a) ≤ $\int_{+a}^{+b}$ f(x) dx ≤ M(b-a), siendo m y M el mínimo y máximo absoluto de f(x) en [a,b]
En nuestro caso como f(x) es estrictamente decreciente en [3, 4], por serlo en (0,+ ∞) – {+2} resulta que:
f(4) = 3/12 = 1/4 es el mínimo absoluto de f(x) en [3,4]
f(3) = 3/5 es el máximo absoluto de f(x) en [3,4]
(b – a) = (4 – 3) = 1
Aplicándole el Teorema del valor medio para integrales tenemos 1/4 ≤ $\int_{+3}^{+4}$ f(x) dx ≤ 3/5

Modelo5 Ejercicio 2 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Una vía de ferrocarril transcurre por un terreno llano de manera que su trazado coincide con el de la recta y = 1 para x ≤ 0. A partir del punto x = 0 su trazado coincide con el de la curva y = (ax + b)e $^{-x}$. Sabiendo que el trazado de la vía admite recta tangente en todos sus puntos, ¿cuánto valen a y b?.

Solución

La función que me han dado es f(x) = $\begin{cases} 1 & si \quad x \le 0 \\ (ax+b)e^{-x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

Como me dicen que admite recta tangente en todos sus puntos me están diciendo que es derivable en $\Re$ y como consecuencia también es continua en $\Re$. En particular es continua y derivable en el punto x = 0
Como f(x) es continua en x = 0 tenemos que:
f(0) = $\lim_{x\to 0^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 0^+}$ f(x)
f(0) = $\lim_{x\to 0^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 0}$ (1) = 1
$\lim_{x\to 0^+}$ f(x) = $\lim_{x\to 0}$ (ax + b)e $^{-x}$ = (0 + b).1 = b. Igualando tenemos que b = 1

Al ser f(x) derivable en $\Re$ tenemos que f '(x) = $\begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ a.e^{-x}+(ax+1)e^{-x}(-1) & si \quad x > 0 \end{cases}$

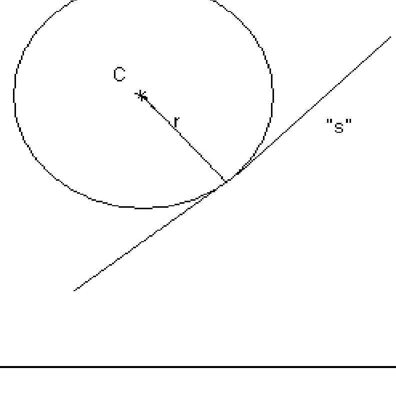
Como es derivable en x = 0, f '(0 $^-$) = f '(0 $^+$)
f '(0 $^-$) = $\lim_{x\to 0^-}$ f '(x) = $\lim_{x\to 0}$ (0) = 0
f '(0 $^+$) = $\lim_{x\to 0^+}$ f(x) = $\lim_{x\to 0}$ [a.e $^{-x}$ + (ax + 1)e $^{-x}$(-1)] = a + 1(-1). Igualando
a – 1 = 0, de donde a = 1

Modelo5 Ejercicio 3 Opción B sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. ¿Es posible determinar una circunferencia conocido su centro y una de sus rectas tangentes? Justifica la respuesta.
(b) [1 punto]. Calcula el radio de una circunferencia cuyo centro es el punto C(1,-1) sabiendo que la recta de ecuación 2x + y = 4 es tangente en uno de sus puntos.

Solución

a)



Si conocemos el centro C y una de las rectas tangentes "s" a la circunferencia podemos calcular el radio de la circunferencia r como la distancia del centro a la recta "s", puesto que el radio es perpendicular a todas las rectas tangentes a la circunferencia.

b)

Centro C(1,-1)

Recta tangente "s" ≡ 2x + y – 4 = 0. Su vector normal es **n** = (2,1)

El radio es r = d(C,"s") = $\frac{|2(1)+(-1)-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

La ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1/5$

Modelo5 Ejercicio 4 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Dados los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x + 2z = 3$, $\pi_2 \equiv 3x + y + z = -1$, $\pi_3 \equiv 2y - z = -2$, y $\pi_4 \equiv x - y + \lambda z = -5$, determina el valor de λ para el que los cuatro planos tienen un solo punto común y calcula dicho punto.

Solución

Los cuatro planos se pueden considerar como cuatro ecuaciones con tres incógnitas

x + 2 z = 3

3x + y + z = - 1

2 y - z = - 2

x - y + λz = -5

Para que el sistema tenga solución única rango(A) = rango(A*) = 3, siendo A la matriz de los coeficientes y A* la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda & -5 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ = 1(-1-2) + 0 + 2(6-0) = -3 + 12 = 9 ≠ 0, rango(A) = 3

Para que rango(A*) = 3, det(A*) tiene que ser cero

$$\det(A^*) = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF+1^aF(-3) \\ \\ 4^aF+1^aF(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 & -18 \end{vmatrix} = \text{[Por adjuntos 1ª columna]}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF+1^aF(-2) \\ 3^aF+1^aF(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & \lambda-7 & -18 \end{vmatrix} = \text{[Por adjuntos 1ª columna]}$$

$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ \lambda-7 & -18 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ \lambda-7 & -1 \end{vmatrix}$ = 18(-9 - λ + 7) = 18(-2 - λ) = 0, de donde λ = -2 para que los cuatro plano se corten en un solo punto.

Para calcular el punto de corte resolvemos el sistema determinado por los tres primeros planos

x + 2 z = 3		x + 2z = 3	
3x + y + z = - 1	2ªF + 1ªF(-3)	y – 5z = -10	
2 y - z = - 2		2y – z = - 2	3ªF+2ªF(-2)

x + 2z = 3

y – 5z = -10

9z = 18 de donde z = 2, y = 0 y x = -1.

El punto donde se cortan los cuatro planos con λ = -2 es (x,y,z) = (-1,0,2)